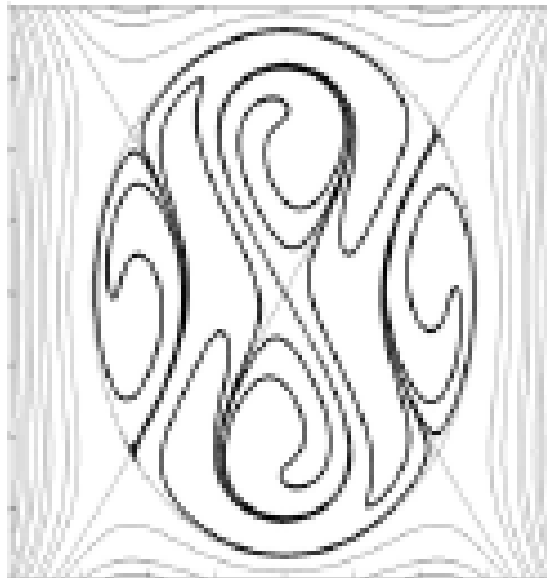


Buku Pelengkap

DINAMIKA NONLINIER
Edisi I



Dr. Husin Alatas

Bagian Fisika Teori

Departemen Fisika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor

BAB I

PENDAHULUAN

Agaknya mudah untuk dibayangkan jika anda memberi gaya pada sebuah bandul sehingga mengalami penyimpangan kecil dan secara bersamaan orang lain melakukan hal yang sama pada bandul tersebut, maka besar simpangannya merupakan penjumlahan linier sederhana (seperti $1+1=2$) dari simpangan yang dihasilkan jika anda dan orang tersebut melakukannya secara terpisah. Ketika simpangan yang anda dan orang tersebut hasilkan cukup besar, maka penjumlahan sederhana ini tidak berlaku lagi. Kegagalan penjumlahan sederhana ini merupakan ciri pokok gejala nonlinieritas. Walaupun ide dasarnya sederhana, tetapi implikasinya dapat dikatakan sangat kompleks. Jika berhadapan dengan sistem yang memiliki sifat nonlinieritas, hal yang umum dilakukan fisikawan untuk menghindari kerumitan dalam memecahkan model terkait adalah dengan menyelidikinya dalam kerangka teori gangguan. Dalam teori ini, gejala nonlinieritas dianggap sebagai gangguan kecil sehingga pemecahan dinamika sistem tetap dapat dilakukan berdasar kaidah linier. Kini, setelah nonlinieritas sistem tidak lagi dianggap sebagai gangguan, gejala-gejala baru yang selama ini tersembunyi di dalam sistem fisis tersebut satu persatu banyak yang kemudian terungkap.

Selain kasus gerakan bandul di atas, hampir seluruh gejala fisika yang kita jumpai sehari-hari merupakan sistem yang nonlinier. Karet yang tidak kembali ke bentuk semula jika ditarik terlalu panjang, mendorong mobil agar berjalan lebih sulit ketimbang mendorong mobil yang sudah berjalan adalah contoh-contoh sederhana gejala akibat nonlinieritas. Dari sedemikian banyak gejala akibat nonlinieritas yang muncul, setidaknya terdapat dua gejala penting yang mencirikan secara spektakuler sifat nonlinieritas alam, yakni kehadiran *soliton* dan gejala *chaos*.

Terkuaknya kehadiran soliton yang secara teknis matematik didefinisikan sebagai pemecahan terlokalisir persamaan dinamika nonlinier, dapat ditelusuri mulai dari tahun 1834, ketika seorang *naval architect* asal Skotlandia yang bekerja pada VOC, John Scott-Russell, mencatat dan mempelajari ihwal perambatan sebuah gundukan air pada suatu kanal sempit di Edinburgh. Pada awalnya Russell secara tidak sengaja mengamati sebuah kapal kecil yang

sedang melaju dan kemudian secara tiba-tiba berhenti. Ia memperhatikan bahwa gundukan air yang muncul di depan kapal terus melaju tanpa mengalami perubahan bentuk untuk waktu yang relatif cukup lama. Hal ini cukup membingungkan kala itu, karena seharusnya gundukan itu segera menyebar dan hilang. Ia juga mencatat fakta lain yang cukup mengherankan, ternyata semakin tinggi gundukan, semakin cepat pula laju perambatannya. Membutuhkan waktu sekitar enam puluh satu tahun, yaitu hingga tahun 1895, untuk menjelaskan bahwa gejala yang diamati oleh Russel berupa terbentuknya gelombang soliter tersebut dikendalikan oleh suatu persamaan dinamika nonlinier Korteweg-de Vries (KdV), yang dinamai sesuai dengan nama perumusnyanya Diderik Johannes Korteweg dan Gustave de Vries.

Sekitar tujuh puluh tahun kemudian, yakni di tahun 1965, persamaan KdV diperoleh kembali oleh Martin Kruskal dan Norman Zabusky, ketika mereka mencoba mempelajari ulang gejala aneh yang ditemukan oleh Enrico Fermi, John Pasta dan Stanislaw Ulam (FPU) sewaktu menyelidiki sifat konduktivitas termal bahan berdasarkan model dwiatomik yang diasumsikan terhubung melalui ikatan yang berperilaku seperti pegas nonlinier. Kerja yang dilakukan FPU di Los Alamos, New Mexico, Amerika Serikat, dengan menggunakan MANIAC-I di tahun 1955, adalah untuk menyelidiki hipotesis Debye yang dikemukakan sekitar 40 tahun sebelumnya tentang terbatasnya kapasitas termal benda padat terkait dengan sifat nonlinieritas bahan. Secara numerik, Kruskal dan Zabusky menemukan bahwa persamaan tersebut dapat menampung pemecahan berupa gelombang soliter dengan dua atau lebih gundukan terlokalisasi yang merambat. Seperti yang diperoleh Russell, dua gundukan yang berbeda tinggi memiliki kelajuan yang berbeda pula. Anehnya lagi, mereka mengamati bahwa jika dua gundukan tersebut bertemu (berinteraksi) ternyata tingginya bukan merupakan penjumlahan linier keduanya dan setelahnya akan kembali ke bentuk asal, seolah tidak pernah terjadi suatu pertemuan. Satu-satunya ingatan yang membekas dari interaksi tersebut adalah posisi relatif keduanya yang berubah dari posisi yang diperkirakan. Kruskal dan Zabusky menamakan objek ini *soliton*, karena sifatnya yang elastis ketika bertumbukan. Kata soliton merupakan gabungan kata soliter dan akhiran “on”. Penambahan akhiran “on” merujuk pada perilaku seperti “partikel” yang ditunjukkan oleh kedua gundukan ketika berinteraksi dan mengikuti kebiasaan penamaan pada fisika partikel elementer seperti elektron, proton, neutron dan lain sebagainya. Tidak lama setelah penemuan ini, teknik

matematika baru yang dinamakan transformasi hamburan balik dibangun oleh para matematikawan dan fisikawan. Semenjak itu, selusin lebih persamaan dinamika nonlinier dapat dipecahkan secara eksak dan soliton pun bermunculan dimana-mana.

Sekarang, setelah empat dekade berlalu, kata soliton muncul diberbagai cabang fisika. Mulai dari pemodelan transport energi di dalam protein oleh Davydov sampai dengan pemodelan Hadron oleh Tom Skyrme dalam fisika energi tinggi. Pada optik misalnya, soliton hadir sebagai pulsa yang secara teoritis dapat merambat secara stabil di dalam serat optik tanpa mengalami pelebaran yang biasanya terjadi akibat peristiwa dispersi. Secara fisis pelebaran dapat dicegah oleh efek nonlinieritas yang berperan mempersempit lebar pulsa. Dapat ditebak dengan mudah bahwa pemanfaatan soliton optik di dalam teknologi komunikasi akan memberikan keuntungan salah satunya berupa berkurangnya jumlah pengulang yang biasa dipakai untuk pulsa konvensional. Eksperimen dalam skala laboratorium telah menunjukkan potensi aplikasi tersebut. Contoh lain pentingnya pemahaman tentang gejala nonlinieritas terkait dengan kehadiran soliton adalah dalam menjelaskan transport energi di dalam protein. Oleh Davydov di era pertengahan tahun 70-an, ditunjukkan bahwa soliton merupakan kandidat yang paling tepat untuk menggambarkan betapa efisiennya transport yang terjadi di dalamnya. Eksperimen yang mendukung prediksi ini pun telah banyak dilaporkan.

Jika soliton menunjukkan gejala stabilitas yang luar biasa, maka di pihak lain nonlinieritas bertanggung jawab pula atas kemunculan gejala *chaos*, yang secara harfiah dapat diartikan sebagai “kekacauan”. Chaos berlainan dengan random, karena keadaan ini masih memiliki sifat deterministik. Secara matematika, gejala ini pertama kali diprediksi oleh matematikawan besar abad 19, Henri Poincare, disekitar tahun 1880-an ketika mencoba memecahkan permasalahan stabilitas dari suatu sistem dinamis, seperti gerak tiga benda langit di bawah pengaruh gaya gravitasi. Ia menemukan bahwa dalam suatu sistem persamaan nonlinier yang terganggung, perubahan signifikan pada kondisi akhir dapat terjadi walau kondisi awalnya diubah sedikit.

Secara lebih visual, gejala chaos pertama kali dipelajari secara tidak sengaja oleh Edward N. Lorenz, seorang pakar sains atmosfer dari Perancis, di tahun 1963. Kala itu ia tengah mencoba memodelkan aliran konveksi udara tiga dimensi di atmosfer. Lorenz dengan menurunkan model ideal persamaan nonlinier yang terganggung tiga dan berusaha

memecahkannya secara numerik menggunakan pertolongan komputer. Alih-alih memperoleh pemecahan yang berkelakuan baik, ia malah menemukan perilaku aneh yang semula ia anggap sebagai kesalahan numerik. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa lintasan pemecahan dalam ruang tiga dimensi tersebut memiliki ciri lintasan yang tidak teratur. Lintasan berputar-putar mengelilingi suatu titik yang disebut atraktor aneh (*strange attractor*), dan tidak pernah menempuh lintasan yang sama. Jika titik awal perhitungan dirubah sedikit saja, maka akan muncul pola orbit dengan kelakuan serupa tetapi memiliki pola lintasan yang lain sama sekali. Hingga kini, gejala chaos juga dapat dijumpai dimana-mana, mulai dari sistem fisika seperti sirkuit listrik, gerak bandul atau perubahan cuaca. Pemodelan mengenai perilaku sistem sosial, fluktuasi harga saham dan pola hubungan antara mangsa dan pemangsa di dalam suatu ekosistem pun memprediksikan kemungkinan munculnya dinamika chaotik di dalamnya. Secara teknologi, pemahaman tentang chaos menjadi penting ketika mendesain suatu sistem yang dapat bekerja terbebas dari gejala tersebut

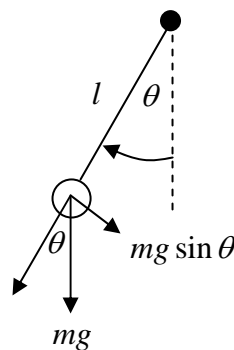
Sejak era emas tahun 1960-an bagi mulai tumbuhnya pemahaman tentang gejala nonlinieritas, riset di bidang sains nonlinier merupakan lahan aktif yang banyak diminati para periset kelas dunia, baik bagi para saintis maupun rekayasawan. Di Indonesia sendiri, bidang ini belum banyak diminati. Padahal, riset tentang nonlinieritas di alam pada hakikatnya merupakan kunci pokok bagi pemahaman, yang barangkali lebih menyeluruh, terhadap alam semesta. Pada gilirannya, pemahaman tersebut akan membawa pula konsekuensi dalam hal pemanfaatan praktisnya secara teknologi, misalnya seperti yang ditunjukkan dengan telah berhasil dikembangkannya komunikasi soliton berdasarkan sistem manajemen dispersi oleh Marconi Corp. dari Inggris di tahun 2001. Sistem dengan sandi UPLx160 ini memiliki kapasitas transfer data sebesar 1,6 Terabit per detik (1 Terabit = 10^{12} bit). Pada tahun 2002, secara komersil sistem tersebut telah dipasang pada jaringan komunikasi yang menghubungkan Perth di pantai barat Australia dan Adelaide di pantai timur yang berjarak sekitar 2.872 km, tanpa membutuhkan satu pun titik regenerasi sinyal.

BAB II PERSAMAAN NONLINIER

Hampir semua gejala alam yang dipelajari dalam Fisika terkait dengan perubahan baik terhadap posisi atau waktu maupun besaran-besaran fisis lainnya. Contoh sederhana yang sering dijumpai adalah gejala perambatan gelombang periodik pada tali yang pada dasarnya merupakan gejala perambatan penyimpangan posisi massa tali dari posisi setimbangnya terhadap waktu akibat gangguan yang periodik pula. Secara matematis, perubahan penyimpangan posisi massa tali tersebut digambarkan melalui suatu persamaan dinamika yang berbentuk persamaan diferensial, yang umumnya parsial, dimana penyimpangan tersebut diwakili oleh suatu fungsi yang bergantung pada posisi dan waktu. Solusi dari persamaan tersebut akan memberikan gambaran pada kita mengenai dinamika simpangan massa tali tersebut untuk setiap posisi dan waktu. Masih sangat banyak lagi contoh-contoh gejala yang dinamika kesemuanya digambarkan oleh sebuah sistem persamaan diferensial.

1. Persamaan linier dan nonlinier untuk bandul sederhana

Sebagai contoh kasus sederhana dinamika dari suatu sistem fisis dengan karakteristik linier maupun nonlinier, kita tinjau gerakan bandul sederhana yang terjadi akibat dipengaruhi oleh gaya gravitasi.



Gambar 1.

Berdasarkan hukum kedua Newton, penggambaran dinamika gerak bandul dengan massa m tersebut diberikan oleh persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (1)$$

Untuk simpangan yang relatif kecil, fungsi sinus pada persamaan (1) dapat dihampiri dengan $\sin\theta \approx \theta$. Dengan demikian, persamaan (1) untuk kasus dengan $\theta \ll 1$ dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad (2)$$

yang secara matematis jauh lebih sederhana untuk dipecahkan. Sekarang kita misalkan terdapat dua buah solusi bagi persamaan (2) sebut saja θ_1 dan θ_2 yang keduanya memenuhi:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta_1 \quad (3a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta_2 \quad (3b)$$

Jika kita jumlahkan persamaan (3a) dan (3b) maka akan kita peroleh:

$$\frac{d^2\theta_3}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta_3 \quad (4)$$

Dimana $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$, sehingga jelas terlihat bahwa persamaan (4) memiliki kesamaan struktur dengan persamaan (2) dan (3). Dengan kata lain, jumlah *linier* dari solusi-solusi persamaan (2) juga merupakan solusi dari persamaan tersebut. Sistem persamaan yang mengizinkan sifat tersebut selanjutnya akan kita sebut sebagai sistem *persamaan linier* dan gejala yang terkait disebut sebagai gejala linier.

Selanjut tinjau persamaan umum (1) untuk kasus bandul harmonis sederhana. Misalkan kembali θ_1 dan θ_2 merupakan solusi yang memenuhi:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta_1 \quad (5a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta_2 \quad (5b)$$

Penjumlahan dari (5a) dan (5b) menghasilkan:

$$\frac{d^2(\theta_1 + \theta_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \quad (6)$$

Jelas terlihat bahwa

$$\frac{d^2(\theta_1 + \theta_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \neq -\frac{g}{l} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (7)$$

Ketidaksamaan antara suku tengah dan suku kanan pada persamaan (7) menunjukkan bahwa superposisi linier $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ bukan solusi dari persamaan (1) yang menghendaki:

$$\frac{d^2\theta_3}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta_3 \quad (8)$$

Dengan kata lain, jumlah *linier* dari solusi-solusi persamaan (2) bukan merupakan solusi dari persamaan tersebut. Sistem persamaan yang dicirikan oleh sifat tersebut dinamakan sebagai sistem *persamaan nonlinier* dan gejala yang terkait disebut sebagai gejala nonlinier.

Untuk persamaan linier (2), telah kita pelajari bahwa bahwa solusi umumnya dapat dituliskan sebagai:

$$\theta(t) = A \sin(t\sqrt{g/l}) + B \cos(t\sqrt{g/l}) \quad (9)$$

dengan A dan B merupakan konstanta integrasi. Catat bahwa solusi (9) merupakan superposisi linier antara fungsi sinus dan kosinus yang masing-masing juga merupakan solusi dari persamaan (2).

Berlainan dengan persamaan (2), persamaan nonlinier (1) dapat dipecahkan manipulasi sebagai berikut; kalikan kedua ruas persamaan dengan $d\theta/dt$, sehingga

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{l} \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \quad (10)$$

Kemudian berdasarkan identitas-identitas $\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ dan $-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\cos \theta)}{dt}$,

Selanjutnya kalikan persamaan (12) dengan ml^2 sehingga persamaan (10) dapat kembali dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta \right] = 0 \quad (11)$$

Suku pertama pada ungkapan persamaan di atas tidak lain merupakan energi kinetik dari bandul tersebut $E_K = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ sedangkan ungkapan suku kedua tidak lain merupakan

energi potensial bandul $E_p = -mgl \cos \theta$ yang diukur dari pangkal tali, sehingga jelas suku pada kurung siku tersebut adalah energi total bandul E . Karena ruas kanan persamaan (11) sama dengan nol, maka ungkapan di dalam kurung siku pada ruas kiri harus merupakan sebuah konstanta:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl \cos \theta = E \quad (12)$$

dimana $E > 0$. Dengan sedikit manipulasi akhirnya diperoleh:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta} \quad (13)$$

yang merupakan persamaan diferensial nonlinier orde satu. Persamaan (13) dapat diselesaikan secara implisit dengan mengubahnya menjadi:

$$\left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta}} \quad (14)$$

Sehingga solusinya adalah:

$$\int_0^t \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} dt = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta'}} \quad (15)$$

atau

$$t = \left(\frac{l}{2g}\right)^{1/2} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos \theta'}} \quad (16)$$

Ruas kanan pada solusi implisit (16) dapat ditransformasikan menjadi integral eliptik. Untuk memperolehnya, gunakan identitas trigonometri $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \theta/2$ kemudian definisikan

$k = \left(\frac{E}{mgl} + 1\right)^{1/2}$ sehingga ungkapan (16) berubah menjadi

$$t = \left(\frac{l}{2g}\right)^{1/2} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{k^2 - 2\sin^2 \theta'/2}} \quad (17)$$

Kemudian definisikan $\sin \theta/2 = k \sin \phi / \sqrt{2}$ dengan $\cos(\theta/2)d\theta = \sqrt{2}k \cos \phi d\phi$, sehingga

$$t = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'/2}} \quad (18)$$

Selanjutnya tinjau integral pada ruas kanan persamaan (18), misalkan $x = \sin \phi$ dengan $dx = \cos \phi d\phi$ dan $\cos^2 \phi = 1 - x^2$, sehingga:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'/2}} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2} \sqrt{1-k^2 x'^2/2}} \quad (19)$$

Untuk menjelas formulasi matematis terkait integral (18) kita misalkan $k = 0$, sehingga:

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \sin^{-1} x \quad (20)$$

atau

$$\sin \left[\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} \right] = x \quad (21)$$

Kembali ke ungkapan (18), dengan cara yang sama kita definisikan sebuah fungsi Jacobi Eliptik $\text{sn}(u, k)$:

$$\text{sn}(u, k) = x = \sin \phi \quad (22)$$

dengan $\left(u, k/\sqrt{2}\right) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2} \sqrt{1-k^2 x'^2/\sqrt{2}}} = \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'/2}}$. Secara khusus $\text{sn}(u, k)$

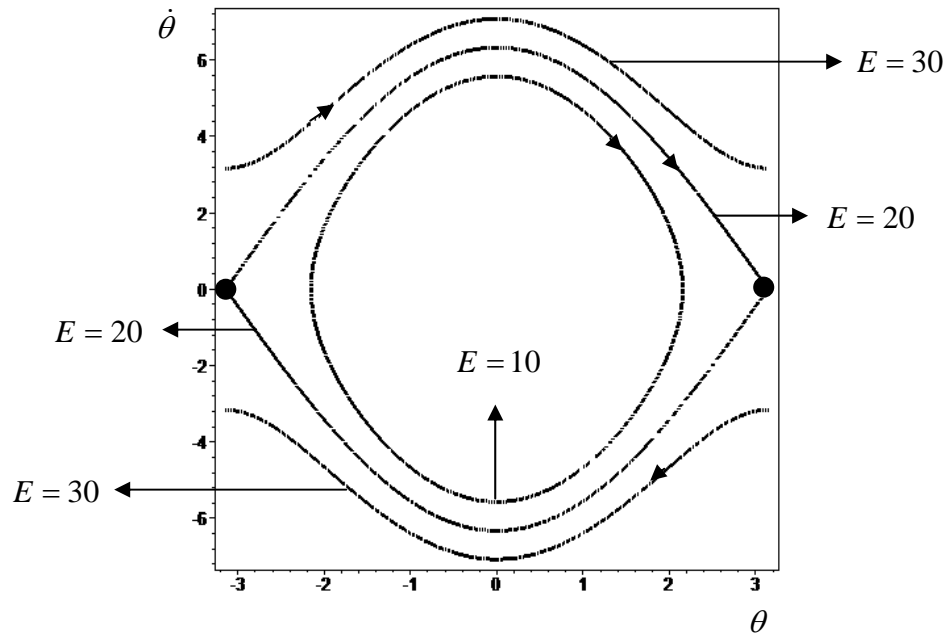
dinamakan sebagai fungsi Jacobi Eliptik jenis pertama dengan modulus k , dimana untuk nilainya dapat dilihat pada tabel khusus. Dari sini, kita dapat memformulasikan solusi eksplisit bagi persamaan nonlinier (1) dengan menuliskan kembali integral (17) sebagai:

$$t = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \text{sn}^{-1}(\sin \phi) = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \text{sn}^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{2} \sin \theta/2}{k} \right) \right] \quad (23)$$

sehingga dengan demikian solusi eksplisit yang dicari adalah:

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left\{ \frac{k}{\sqrt{2}} \text{sn} \left[\left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} t, \frac{k}{\sqrt{2}} \right] \right\} \quad (24)$$

Dibandingkan dengan solusi (9) untuk persamaan linier (2), solusi (24) untuk persamaan nonlinier (1) memiliki pola yang jauh lebih kompleks, karena karakternya ditentukan oleh nilai k .



Gambar 2.

Untuk membandingkan kompleksitas solusi (24) dibandingkan solusi (9), kita tinjau persamaan (12) yang terkait dengan energi total bandul. Secara matematis ungkapan (12) dinamakan sebagai "integral pertama" dari persamaan (12) dan ungkapan:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E \quad (25)$$

merupakan integral pertama dari persamaan (2). Selanjutnya, kita tuliskan $d\theta/dt = \dot{\theta}$, sehingga integral pertama dari persamaan (1) dan (2) berturut-turut adalah:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E \quad (26a)$$

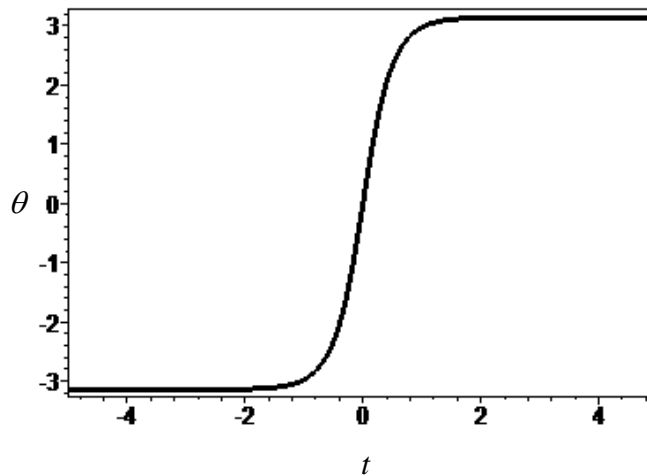
$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E \quad (26b)$$

dengan $E > 0$. Tuliskan $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$, diperoleh untuk kasus nonlinier:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2(E + mgl \cos \theta)}{ml^2}} \quad (27)$$

Seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2 untuk $m = 2$, $l = 1$ dan $g = 10$, dalam bidang $(\theta, \dot{\theta})$, yang selanjutnya akan disebut bidang fasa, hubungan antara posisi sudut dan kecepatannya bergantung pada besar E yang ekuivalen dengan k pada solusi (24). Untuk lintasan dengan $E = 30$, bandul akan berputar dalam satu arah selamanya, sedangkan untuk $E = 10$ bandul akan berputar secara periodik. Khusus untuk $E = 20$ bandul akan bergerak dari titik tetap (*fixed point*), yang diwakili oleh lingkaran hitam penuh, dan akan berhenti di titik tetap lain yang berseberangan. Fungsi $\theta(t)$ yang terkait diberikan pada Gambar 3 dan dikenal sebagai solusi "kink" yang memenuhi kondisi $E = mgl$. Dapat membuktikan bahwa pada kondisi tersebut solusinya diberikan secara eksak oleh:

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left\{ \operatorname{sn} \left[\left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} t, 1 \right] \right\} = 2 \sin^{-1} \left\{ \tanh \left[\left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} t \right] \right\} \quad (28)$$



Gambar 3

Dipihak lain, untuk kasus linier adalah hubungan antara $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$ diberikan oleh:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2(E - mgl\theta^2 / 2)}{ml^2}} \quad (29)$$

dan pembaca dapat memeriksa sendiri bahwa lintasan yang dibuat hanya berbentuk elips, sehingga gerakan bandul pun hanya bersifat gerak harmonik sederhana. Penjelasan lebih terinci mengenai dinamika sistem nonlinier dalam bidang/ruang fasa akan diberikan pada bab berikut.

Dari hasil yang diperoleh untuk kasus linier dan nonlinier di atas, jelas terlihat bahwa sifat nonlinieritas memberikan karakteristik-karakteristik yang tidak dijumpai dalam sistem linier.

2. Beberapa jenis persamaan nonlinier

Pada dasarnya, hampir semua persamaan dinamika dalam Fisika Klasik merupakan persamaan nonlinier. Tetapi, mengingat sulitnya pemecahan persamaan-persamaan tersebut, yang biasa dilakukan oleh orang adalah melakukan linierisasi permasalahan dengan memasukkan asumsi-asumsi tertentu sebagaimana yang dilakukan untuk memperoleh persamaan (2) untuk kasus bandul sederhana.

Beberapa persamaan nonlinier yang banyak dikaji orang terkait dengan beberapa gejala fisis antara lain seperti persoalan aliran konveksi udara panas di atmosfer, sirkuit listrik sederhana, perambatan gelombang air pada permukaan dangkal, permasalahan karakteristik arus super pada sambungan material superkonduktor dengan isolator, sampai dengan perambatan gelombang cahaya pada fiber optik. Masih banyak lagi persoalan lain yang menyangkut plasma, kondensasi Bose-Einstein serta gravitasi yang memiliki persamaan dinamika nonlinier.

Dalam pemodelan aliran konveksi udara panas, salah satu persamaan yang terkenal dan telah membawa orang pada pengetahuan tentang sistem yang chaotic adalah persamaan Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (30a)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad (30b)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (30c)$$

Dimana σ , r dan b adalah parameter riil positif sedangkan x , y dan z adalah modulus dominan dari aliran konveksi. Untuk kasus sirkuit listrik sederhana, sejak tahun 1930-an,

telah dikenal suatu sirkuit trioda yang dinamakan sebagai generator van der Pol dengan persamaan dinamika terkait diberikan oleh:

$$\frac{d^2V}{dt^2} - \mu(1 - V^2)\frac{dV}{dt} + \omega^2V = 0 \quad (31)$$

dimana V terkait dengan tegangan keluaran dan μ serta ω adalah parameter riil.

Untuk persoalan perambatan gelombang air pada permukaan dangkal, dikenal persamaan Korteweg de-Vries (KdV) yang pertama kali dirumuskan untuk menjelaskan perambatan gelombang soliter yang diamati oleh Russell pada tahun 1834. Dalam bentuk yang tak berdimensi, persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0u \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (32)$$

dengan u terkait dengan ketinggian air dari posisi setimbang dan a_0 dan a_1 merupakan parameter riil.

Sebagai contoh selanjutnya adalah persamaan sine-Gordon (sG) yang terkait dengan perambatan arus super dari superkonduktor yang menembus isolator, dimana isolator tersebut diapit oleh dua buah material superkonduktor (dikenal juga sebagai sambungan Josephson). Untuk kasus ini, persamaan sG merupakan persamaan dinamika yang terkait dan memiliki bentuk umum:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \sin \Phi = 0 \quad (33)$$

dimana Φ menyatakan fluks magnetik yang menembus isolator.

Persamaan dinamika nonlinier lainnya yang telah dikenal secara luas adalah persamaan Schrödinger nonlinier (NLS) yang menggambarkan perambatan gelombang cahaya pada medium fiber yang indeks biasanya tergantung pada intensitas cahaya. Bentuk persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \beta \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma |E|^2 E = 0 \quad (34)$$

dengan E menyatakan medan listrik, β merupakan parameter yang terkait dengan dispersi dari kecepatan group, sedangkan σ terkait dengan suseptibilitas orde tiga dari medium yang dilalui. Salah satu contoh perluasan lebih lanjut persamaan NLS untuk kasus perambatan

gelombang cahaya dalam medium pandu gelombang planar dengan struktur periodik dalam arah rambat diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \hat{P}_+ E_+ + \delta E_+ + b_0 \left(|E_+|^2 + 2|E_-|^2 \right) E_+ \\ + c_N E_- + b_N \left(|E_-|^2 + 2|E_+|^2 \right) E_- + b_N E_+^2 E_-^* + b_{2N} E_+^* E_-^2 = 0 \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_- E_- + \delta E_- + b_0 \left(|E_-|^2 + 2|E_+|^2 \right) E_- \\ + c_N E_+ + b_N \left(|E_+|^2 + 2|E_-|^2 \right) E_+ + b_N E_-^2 E_+^* + b_{2N} E_-^* E_+^2 = 0 \end{aligned} \quad (35b)$$

dengan E_{\pm} menyatakan medan listrik maju dan mundur untuk tanda positif dan negatif berturut-turut, sedangkan operator $\hat{P}_{\pm} = \pm i \partial / \partial z + D \partial^2 / \partial x^2$.

Secara umum, beberapa contoh persamaan di atas telah dikaji oleh banyak peneliti secara mendalam. Tetapi, mengingat sifat dari persamaan nonlinier yang tidak mengizinkan berlakunya superposisi linier, mengakibatkan pemecahan persamaan-persamaan tersebut menjadi sangat sulit. Tidak ada kaidah umum yang dapat digunakan dalam memecahkannya semua jenis persamaan nonlinier. Akan tetapi, terdapat teknik-teknik pemecahan tertentu yang spesifik dan dapat saja berbeda untuk setiap jenis persamaan yang ditinjau. Dilain pihak, pemecahan secara numerik seringkali memberikan hasil yang bermanfaat walaupun tidak dapat memberikan gambaran yang detail dan mendalam mengenai gejala yang terkandung dalam persamaan-persamaan tersebut.

BAB III

DINAMIKA SISTEM

Bab ini membahas dinamika suatu sistem fisis yang dapat digambarkan oleh suatu set persamaan diferensial biasa yang merupakan fungsi satu variabel. Konsep mengenai ruang-fasa, titik kritis serta stabilitasnya merupakan hal yang fundamental dalam dinamika sistem. Patut dicatat bahwa konsep yang didiskusikan berikut ini memainkan peranan yang luas dan tidak terbatas pada Fisika saja. Sistem ekologi, kimia dan masih banyak cabang ilmu lainnya memanfaatkan perumusan dinamika sistem untuk menerangkan stabilitas dari suatu sistem-sistem terkait.

1. Persamaan diferensial biasa "autonomous"

Sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) bersifat autonomous jika di dalamnya tidak terdapat kebergantungan terhadap variabel secara eksplisit. Tinjau set PDB orde satu berikut:

$$\dot{x}_n = f_n(x_n) \quad (1)$$

dimana

$$\dot{x}_n \equiv \frac{dx_n}{dt} \quad (2)$$

disini $x_n \equiv x_n(t)$ dan t adalah variabel bebas dan $n = 1 \dots N$ dimana N menyatakan jumlah PDB yang terdapat dalam set tersebut. Persamaan (1) dinamakan sebagai persamaan diferensial biasa yang autonomous karena fungsi f pada bagian sebelah kanan persamaan bukan merupakan fungsi eksplisit dari t . Misalkan $x_n(t)$ adalah sebuah solusi bagi sistem PDB (1) maka $x_n(t - t_0)$, dengan t_0 sebuah konstan, juga merupakan solusi. Hal ini dapat dengan mudah dibuktikan melalui perubahan variabel $t \rightarrow \tau = t - t_0$ dan melalui kenyataan bahwa t tidak muncul secara eksplisit di dalam PDB, sehingga menjamin invariansinya. Dengan kata lain, sifat ini menyatakan bahwa solusi PDB (1) invarian (tidak berubah bentuk) terhadap transformasi translasi.

Konsekuensi dari kenyataan ini adalah; misalkan $\sin t$ adalah solusi dari suatu sistem PDB, maka $\cos t$ juga merupakan solusi, karena $\sin t \rightarrow \cos t$ jika $t \rightarrow t - \pi/2$. Dalam ruang

fasa, yang akan akan dibahas pada pasal berikut, kedua solusi berada pada trayektori yang sama.

2. Ruang-fasa

Untuk memberikan gambaran mengenai pengertian ruang-fasa, kita tinjau kembali persamaan (2) pada bab II untuk kasus bandul sederhana yang terlinierisasi, yang dituliskan kembali dalam bentuk sederhana berikut:

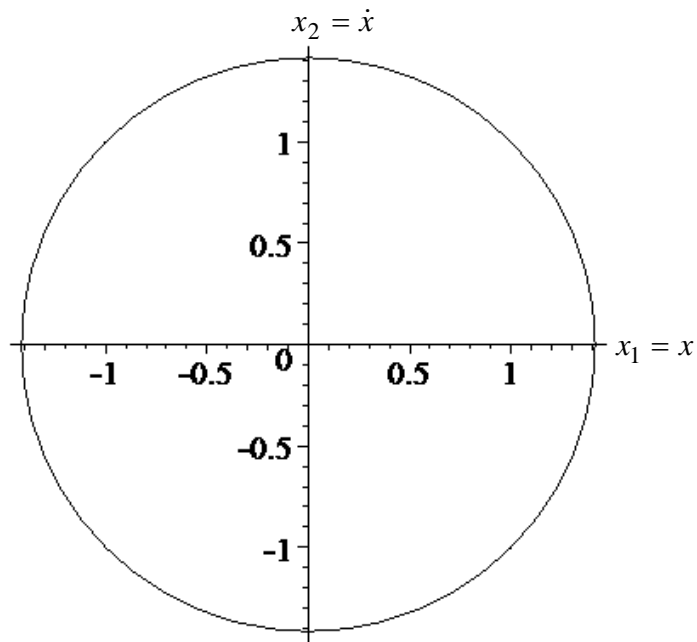
$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3)$$

Dengan mendefinisikan $x = x_1$ dan $\dot{x} = x_2$ maka persamaan (3) dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad (4b)$$

Jelas terlihat bahwa melalui pendefinisian ulang, persamaan (3) berubah menjadi sistem PDB orde satu seperti set PDB (1) dengan $N = 2$.



Gambar 1

Telah kita bahas pada bab II, bahwa solusi dari persamaan (3) adalah solusi harmonik yang merupakan superposisi linier dari fungsi sinus atau kosinus, sehingga dengan demikian solusi bagi persamaan (4) diberikan oleh:

$$x_1 = \sqrt{c} \sin t \quad (5a)$$

$$x_2 = \sqrt{c} \cos t \quad (5b)$$

dengan c adalah sebarang konstanta. Selanjutnya, berdasarkan kenyataan berikut:

$$x_1^2 + x_2^2 = c(\sin^2 t + \cos^2 t) = c \quad (6)$$

maka jelas bahwa dalam bidang $(x_1, x_2) \equiv (x, \dot{x})$ kurva yang terbentuk adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari \sqrt{c} sebagaimana yang diberikan pada Gambar 1 untuk $c = 2$.

Cara lain untuk memperoleh kurva tersebut adalah dengan membagi persamaan (4a) dengan persamaan (4b) sehingga:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \quad (7)$$

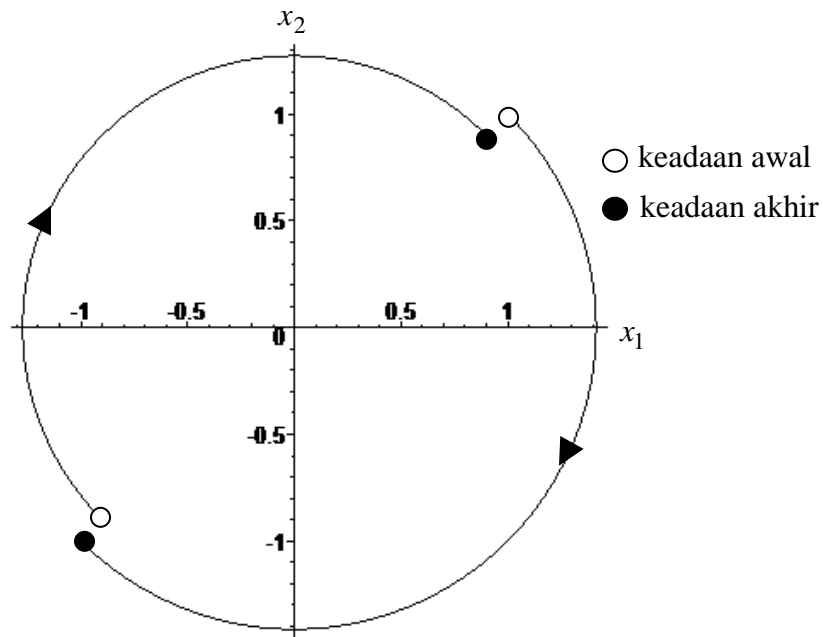
Lakukan integrasi berikut:

$$\int x_1 dx_1 = -\int x_2 dx_2 \quad (8)$$

diperoleh:

$$x_1^2 + x_2^2 = c \quad (9)$$

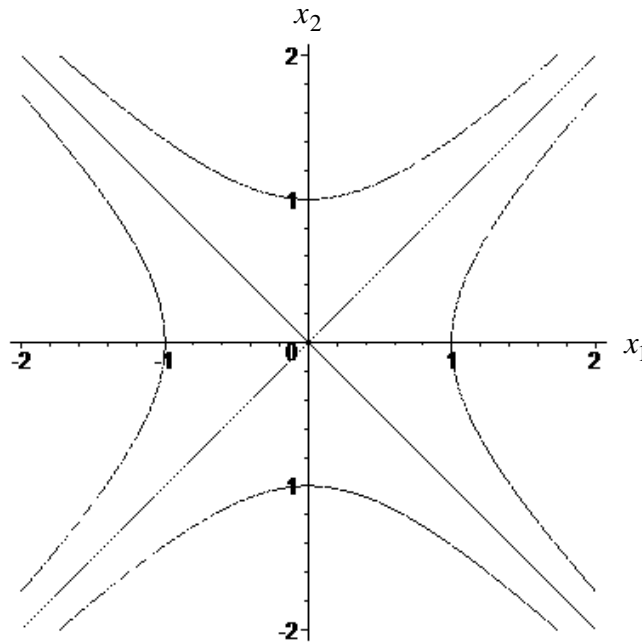
yang sama dengan persamaan (6) dan disini c merupakan konstanta integrasi.



Gambar 2

Secara khusus bidang $(x_1, x_2) \equiv (x, \dot{x})$ dinamakan sebagai "bidang-fasa" bagi persamaan PDB (4) dan kurva lingkaran yang terbentuk dinamakan sebagai trayektori atau orbit, yang merupakan solusi PDB (4). Untuk kasus dengan $N > 2$ dengan solusi $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, maka trayektori solusi yang tersebut berada pada suatu ruang-fasa berdimensi N . Catat bahwa untuk kasus $N = 2$, kita menyebutnya sebagai bidang-fasa, sedangkan untuk dimensi yang lebih tinggi disebut sebagai ruang-fasa.

Salah satu karakter penting yang perlu dicatat adalah: trayektori-trayektori dalam sebuah ruang/bidang fasa tidak pernah berpotongan. Sebagaimana yang dicontohkan pada Gambar 2, untuk dua keadaan awal yang berbeda, trayektori solusi yang arah alirannya ditunjukkan melalui kepala panah, tidak pernah akan berpotongan. Hal ini berlaku umum untuk semua jenis PDB (4).



Gambar 3

Selanjutnya kita tinjau jenis PDB yang lain, yaitu:

$$\ddot{x} - x = 0 \tag{10}$$

Sistem PDB orde satu yang terkait diberikan oleh:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{11a}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \tag{11b}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (9), kita peroleh persamaan kurvanya adalah:

$$x_1^2 - x_2^2 = c \quad (12)$$

Tinjau untuk $c = 0$ berlaku $x_1 = \pm x_2$, sehingga kurva yang dibentuk adalah garis-garis lurus yang melalui titik pusat $(0, 0)$. Sedangkan untuk $c \neq 0$ persamaan tersebut membentuk trajektori berbentuk hiperbola. Berdasarkan kenyataan ini diperoleh trajektori untuk berbagai nilai c diberikan oleh Gambar 3.

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa solusi bagi persamaan (11) untuk sebarang c diberikan oleh:

$$x_1 = \sqrt{c} \cosh t \quad (13a)$$

$$x_2 = \sqrt{c} \sinh t \quad (13b)$$

Berdasarkan kedua contoh yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa untuk sistem PDB (4) yang berbeda, maka secara umum trayektori yang terkait secara umum berbeda. Pada pasal berikut kita akan meninjau sifat dari titik $(0, 0)$ untuk kedua kasus yang terlihat memiliki karakter yang berbeda.

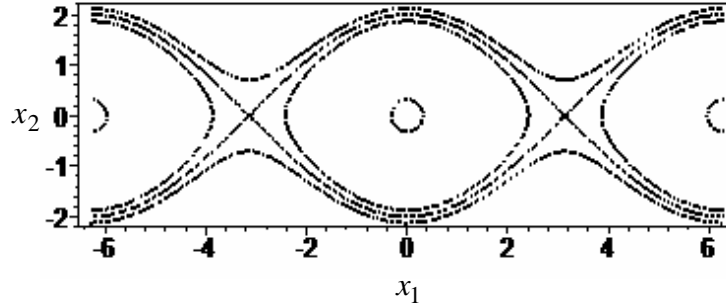
2. Titik Kritis dan Linierisasi

Kembali kita tinjau persamaan (1) yang kembali dituliskan dalam bentuk yang lebih eksplisit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (14)$$

Misalkan terdapat titik-titik $\{x_n = x_{n,0}\}$ yang mengakibatkan $f_n(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, \dots, x_{N,0}) = 0$ secara serempak, maka set titik tersebut dinamakan sebagai titik kritis yang terkait dengan $\{\dot{x}_n = 0\}$. Berdasarkan kenyataan ini, sebuah titik kritis dalam ruang-fasa terkait dengan solusi stasioner dimana $x(t) = c$ untuk semua waktu dengan c merupakan sebuah konstanta. Untuk mengetahui karakteristik dari titik-titik tersebut, dapat dilakukan dengan melakukan linierisasi sistem persamaan terkait, yakni dengan melakukan ekspansi Taylor terhadap f_n di sekitar $x_n = x_{n,0}$ hingga orde pertama saja:

$$\dot{x}_n = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n,0}) \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x=x_{n,0}} + \text{suku orde tinggi} \quad (15)$$



Gambar 4

Sebagai contoh kita tinjau persamaan untuk bandul sederhana:

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad (16)$$

yang dapat dituliskan kembali dalam bentuk PDB orde satu berikut:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (17a)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 \quad (17b)$$

dengan $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$. Titik kritis bagi persamaan (17) diberikan oleh kondisi $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ dan dapat dibuktikan dengan mudah bahwa titik-titik $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(-\pi, 0)$ dan $(\pi, 0)$ merupakan set titik-titik kritis yang dimaksud. Linierisasi persamaan (16) disekitar titik kritis $(x_1, x_2) = (0, 0)$ diberikan oleh:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (18a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad (18b)$$

Jelas terlihat bahwa persamaan (18) sama dengan persamaan (4) yang dengan demikian perilaku trayektori solusi di sekitar titik kritis di dalam ruang-fasa memiliki bentuk sebagaimana yang diberikan oleh Gambar 1, dan dengan demikian jelas bahwa solusi di sekitar titik tersebut merupakan solusi yang bersifat periodik. Sedangkan untuk linierisasi di sekitar titik kritis $(x_1, x_2) = (\pm \pi, 0)$ diberikan oleh:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = x_2 \quad (19a)$$

$$\dot{x}_2 = \tilde{x}_1 \quad (19b)$$

dengan $\tilde{x}_1 = x_1 \mp \pi$. Jelas terlihat bahwa sistem PDB (19) sama dengan persamaan (11) dan trayektori di sekitar titik kritis tersebut diberikan oleh Gambar 3. Berdasarkan karakter solusi di sekitar titik-titik kritis yang terkait. Maka secara global trayektori dari persamaan (16) dalam ruang-fasa (x_1, x_2) diberikan oleh Gambar 4 yang dapat dibandingkan dengan Gambar 2 pada bab II.

3. Jenis-jenis titik kritis

Pada pasal ini kita akan memanfaatkan secara lebih mendalam linierisasi persamaan (14) untuk menentukan karakter dari suatu titik kritis secara lebih umum. Untuk itu, kita tuliskan kembali persamaan (15) ke dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\dot{X} = AX \quad (20)$$

dengan

$$X \equiv (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N)^T \quad (21a)$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial X_N} \end{pmatrix} \quad (21b)$$

di sini $X_n = x_n - x_{n,0}$, yang mengimplikasikan bahwa titik kritis ditranslasikan ke titik asal $(0,0)$, dan A adalah $N \times N$ matriks yang diasumsikan non-singular:

$$\det A \neq 0 \quad (22)$$

Untuk menganalisa karakteristik dari titik kritis terkait kita tentukan terlebih dahulu persoalan harga eigen bagi matriks A :

$$A\tilde{X} = \lambda\tilde{X} \quad (23)$$

dengan λ merupakan harga eigen terkait yang dapat diperoleh dengan memecahkan persamaan karakteristik berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (24)$$

Misalkan dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh harga-harga eigen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ yang kesemuanya berlainan, maka terdapat sebuah matriks non-singular M , dimana kolom-kolomnya merupakan vektor eigen terkait, sedemikian rupa sehingga $M^{-1}AM$ merupakan

matriks diagonal Jordan dengan elemen tidak nol-nya hanya terdapat pada entri diagonal dan berisikan harga-harga eigen yang bersangkutan:

$$M^{-1}AM = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (25)$$

Berdasarkan perumusan ini, dapat didefinisikan sebuah transformasi $X = MZ$ yang membuat persamaan (20) dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\dot{Z} = M^{-1}AMZ \quad (26)$$

Karena matriks $M^{-1}AM$ berbentuk matriks diagonal, maka solusi bagi Z menjadi sederhana:

$$Z(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_N e^{\lambda_N t})^T \quad (27)$$

dengan c_n adalah konstanta riil sebarang. Perilaku dari solusi (27) akan berbeda untuk harga-harga nilai eigen yang berbeda.

Berikut kita akan membatasi diri pada kasus untuk $N = 2$, dengan solusi bagi $Z(t)$ diberikan oleh:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (28)$$

dan matriks $M^{-1}AM$ diberikan oleh:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Dari sini, kita telah dapat menentukan jenis-jenis titik kritis yang berada pada suatu bidang fasa yang dibentuk oleh (z_1, z_2) . Perlu dicatat, berdasarkan transformasi $X = MZ$, kelakuan trayektori yang terdapat pada domain Z sama dengan kelakuannya dalam domain X . Dengan melakukan eliminasi variabel t dari persamaan (28) kita dapatkan:

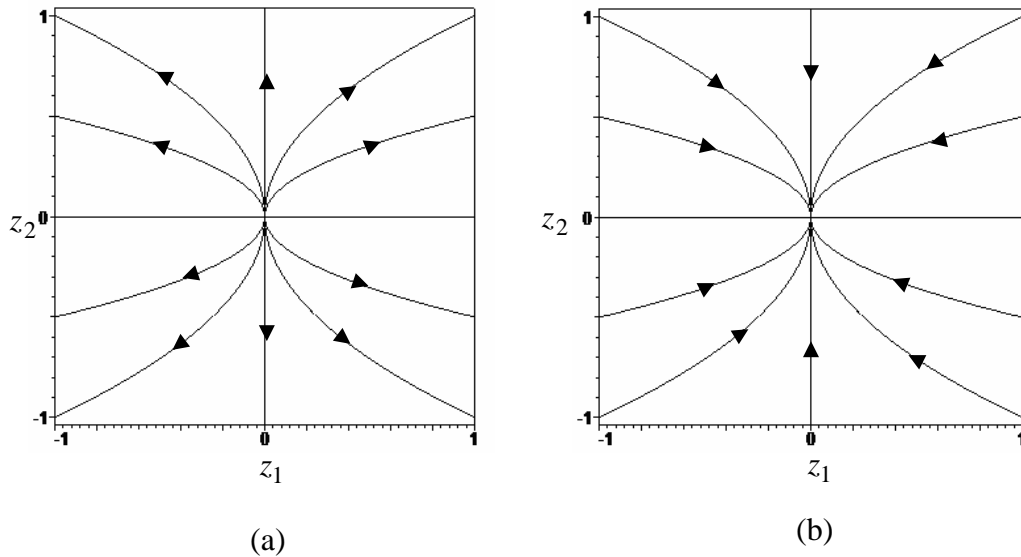
$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1} \quad (30)$$

dimana c merupakan sebuah konstanta riil sebarang.

3.1. Titik Node

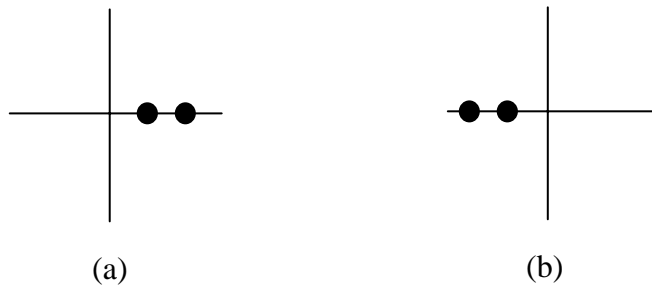
Misalkan λ_1 dan λ_2 berharga riil dengan $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Pada Gambar 5a diperlihatkan bahwa trayektori solusi berbentuk parabola yang arah alirannya dari $t = -\infty$ ke ∞ berasal dari titik asal $(0,0)$ yang merupakan titik kritis yang dimaksud. Secara khusus titik kritis ini

dinamakan titik node dengan atraktor negatif karena untuk arah aliran ketika variabel $t \rightarrow -\infty$ trayektori menuju titik kritis. Dipihak lain, untuk kasus dengan $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 5b, arah aliran trayektori menuju titik kritis ketika $t \rightarrow \infty$, sehingga titik kritis tersebut dinamakan sebagai titik node dengan atraktor positif.



Gambar 5

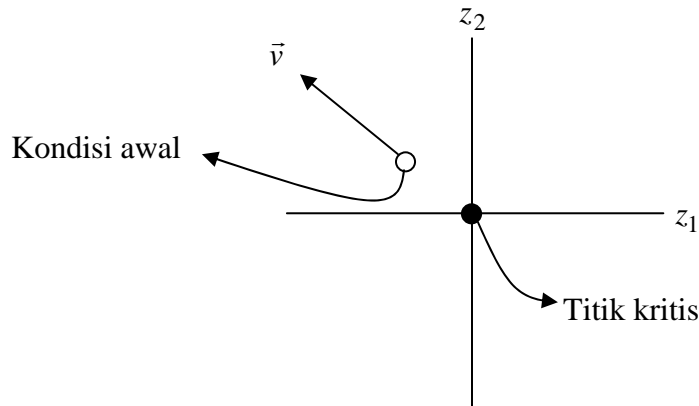
Diagram harga eigen untuk kasus titik node ini diberikan oleh Gambar 6a dan 6b masing-masing untuk kasus atraktor negatif dan positif berturut-turut.



Gambar 6

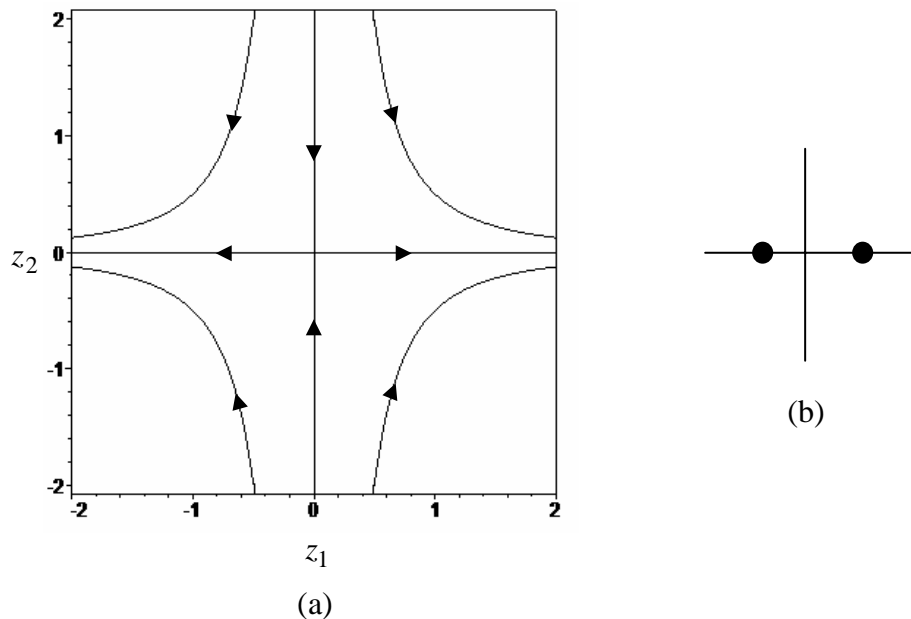
Untuk menentukan arah dari aliran trayektori sebagaimana yang diwakili oleh kepala anak panah pada Gambar 5 dapat dilakukan dengan prosedur sebagai berikut: definisikan vektor aliran yang terkait dalam representasi basis vektor \hat{z}_1 dan \hat{z}_2 pada bidang (z_1, z_2) sebagai berikut:

$$\vec{v} = \dot{z}_1 \hat{z}_1 + \dot{z}_2 \hat{z}_2 \quad (31)$$



Gambar 7

Kemudian tinjau, misalkan, sebuah trayektori dengan kondisi awal yang berada pada kuadran 2 dimana $z_1 < 0, z_2 > 0$ dan dekat titik node dengan atraktor negatif (Gambar 5a), maka berdasarkan diferensiasi solusi $z_1 = -c_1 e^{\lambda_1 t}$ dan $z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$ terhadap variabel t yang tidak lain ekuivalen dengan persamaan $\dot{z}_1 = -\lambda_1 |z_1|$ dan $\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$, karena $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ untuk kasus negatif atraktor maka dengan demikian vektor aliran \vec{v} memiliki arah seperti yang diilustrasikan pada Gambar 7, yang bersesuaian dengan arah anak panah pada trayektori di kuadran Gambar 5a.



Gambar 8

3.2. Titik sadel

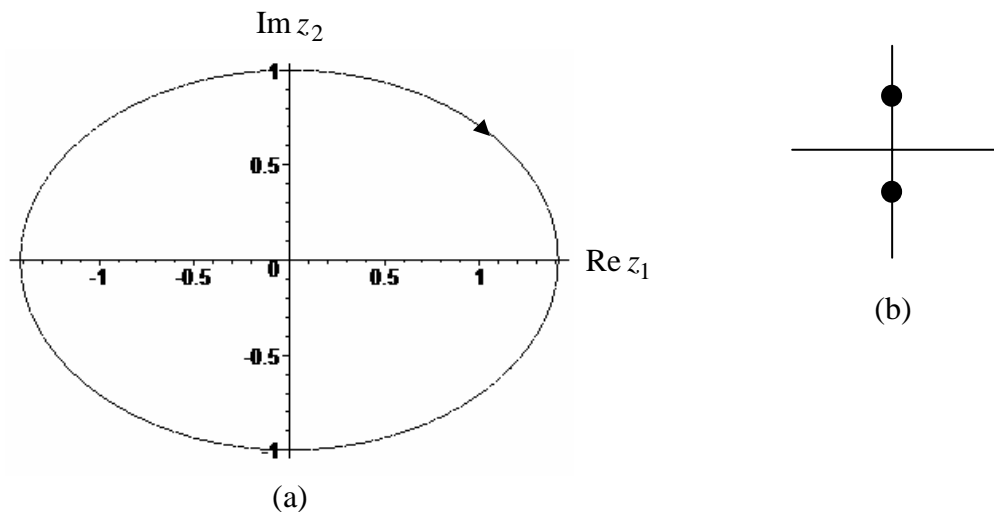
Misalkan λ_1 dan λ_2 berharga riil dengan $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ atau sebaliknya. Titik kritis yang terkait dengan kondisi ini dinamakan sebagai titik sadel. Pada Gambar 8a diperlihatkan bahwa trayektori dari solusi-solusi yang berada di luar sumbu-sumbu z_1 dan z_2 memiliki bentuk hiperbola, sedangkan pada masing-masing sumbu terdapat dua jenis trayektori, satu menuju titik kritis, dimana untuk $t \rightarrow \infty, (z_1, z_2) \rightarrow (0, 0)$, dan satu menjauhi titik kritis, dimana untuk $t \rightarrow -\infty, (z_1, z_2) \rightarrow (0, 0)$. Diagram harga eigen untuk kasus ini diberikan pada Gambar 8b. Pembaca dapat meyakini diri bahwa trayektori pada Gambar 8a adalah sama dengan trayektori yang terdapat pada Gambar 3, yang pada dasarnya dapat dihubungkan melalui transformasi rotasi, sehingga titik kritis yang terkait dengan kasus bandul sederhana di $x_1 = \pm\pi, x_2 = 0$ pada Gambar 4 tidak lain merupakan titik sadel. Selanjutnya, untuk menganalisa arah aliran trayektori dapat digunakan prosedur seperti yang telah dijelaskan untuk kasus titik node yakni melalui penentuan arah vektor \vec{v} pada persamaan (31).

3.3. Titik Center

Selain memiliki harga riil, λ_1 dan λ_2 dapat pula berharga imajiner. Misalkan $\lambda_1 = i\omega$ dan $\lambda_2 = -i\omega$, dengan ω berharga riil, sehingga:

$$z_1(t) = c_1 e^{i\omega t} \tag{32a}$$

$$z_2(t) = c_2 e^{-i\omega t} \tag{32b}$$



Gambar 9

Karena z_1 dan z_2 merupakan bilangan kompleks, dapat dibuktikan bahwa solusi (32) terkait dengan satu set persamaan PDB berikut:

$$\operatorname{Re} \dot{z}_1 = \frac{\omega c_1}{c_2} \operatorname{Im} z_2 \quad (33a)$$

$$\operatorname{Im} \dot{z}_2 = -\frac{\omega c_2}{c_1} \operatorname{Re} z_1 \quad (33b)$$

$$\operatorname{Im} \dot{z}_1 = \frac{\omega c_1}{c_2} \operatorname{Re} z_2 \quad (33c)$$

$$\operatorname{Re} \dot{z}_2 = -\frac{\omega c_2}{c_1} \operatorname{Im} z_1 \quad (33d)$$

Dari set persamaan (33a) dan (33b) terlihat trayektori yang terkait dapat ditinjau pada bidang $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_2)$ sedangkan untuk persamaan (33c) dan (33d) bidang yang terkait adalah $(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2)$. Bandingkan dengan persamaan (4), jelas bahwa pada bidang-bidang tersebut trayektori membentuk sebuah elips sebagaimana yang diilustrasikan pada Gambar 9a (buktikan!) pada bidang $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_2)$ untuk kasus $c_1 \neq c_2$, sedangkan untuk kasus $c_1 = c_2$ membentuk lingkaran. Diagram harga eigennya diberikan dalam Gambar 9b.

3.4. Titik Fokus

Sekarang misalkan $\lambda_1 = \mu + i\omega$ dan $\lambda_2 = \lambda_1^* = \mu - i\omega$ merupakan bilangan kompleks, dengan $\mu\omega \neq 0$. Bentuk persamaan (28) dalam kasus ini menjadi:

$$z_1(t) = c_1 e^{\mu t} e^{i\omega t} \quad (35a)$$

$$z_2(t) = c_2 e^{\mu t} e^{-i\omega t} \quad (35b)$$

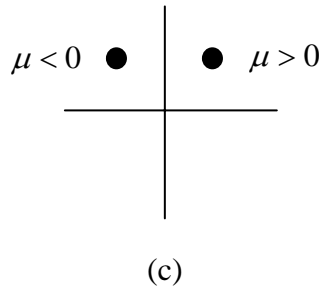
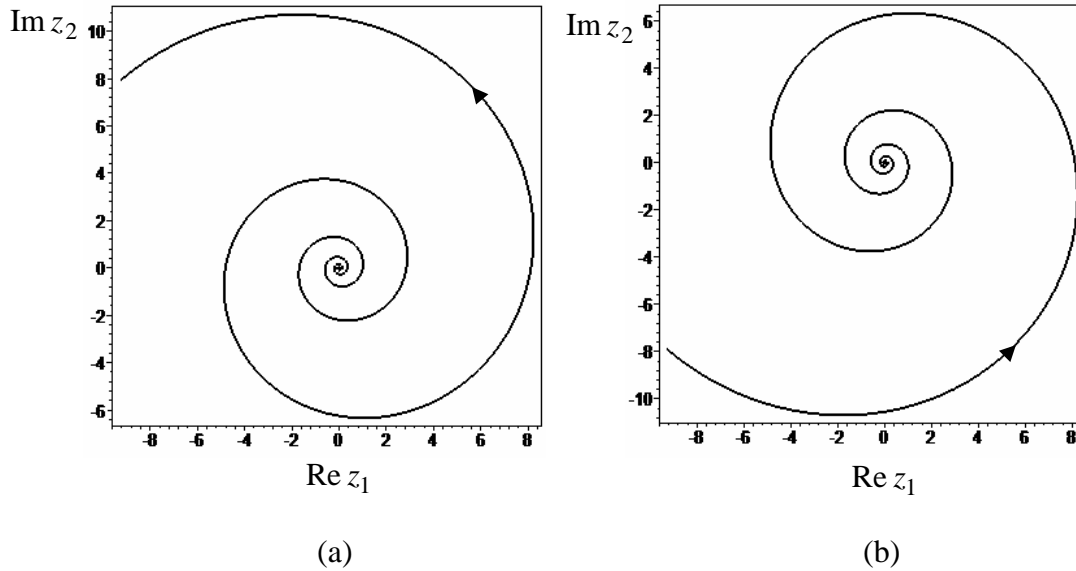
dengan. Sama seperti kasus untuk titik center, kita tinjau trayektori solusi di sekitar titik kritis tersebut dalam bidang $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_2)$ dimana:

$$\operatorname{Re} z_1 = c_1 e^{\mu t} \cos \omega t \quad (36a)$$

$$\operatorname{Im} z_2 = c_2 e^{\mu t} \sin \omega t \quad (36b)$$

Terlihat pada Gambar 10, trayektori yang terkait dengan harga eigen kompleks berbentuk spiral. Untuk kasus dengan $\mu > 0$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 10a,, arah aliran menuju titik kritis ketika $t \rightarrow -\infty$ dan dinamakan sebagai titik fokus dengan

atraktor negatif. Sedangkan untuk kasus dengan $\mu < 0$ (Gambar 10b), arah aliran menuju titik kritis ketika $t \rightarrow \infty$ dan dinamakan sebagai titik fookus dengan atraktor positif. Diagram harga eigen yang terkait dengan kasus ini diberikan di Gambar 10c.



Gambar 10

4. Integral pertama dan sistem Hamiltonian

Kembali pada persamaan (9) dan (12) yang diperoleh dengan melakukan eliminasi variabel independen dalam sistem PDB terkait. Kedua persamaan yang berharga konstan pada ruas kanannya secara khusus dikenal sebagai integral pertama dari sistem PDB yang terkait. Jika sebuah PDB memiliki sebuah integral pertama, maka kita akan dengan mudah, secara prinsip, melukiskan ruang fase yang terkait. Dalam Fisika, integral pertama dikenal pula sebagai konstanta gerak yang menggambarkan konstrain dalam dinamika sistem tersebut.

Misalkan H adalah integral pertama bagi sistem PDB dengan fungsional x_1, x_2 dan berlaku:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad (37a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad (37b)$$

maka sistem tersebut merupakan sistem Hamiltonian dan persamaan (37) dinamakan sebagai persamaan gerak Hamilton, sedangkan integral pertamanya disebut sebagai Hamiltonian. Pasangan x_1 dan x_2 disebut sebagai pasangan kanonik.

Sebagai contoh, kita tinjau kembali persamaan:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (38a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad (38b)$$

Telah diperoleh integral pertama bagi sistem ini adalah:

$$x_1^2 + x_2^2 = c \quad (39)$$

Jika kita definisikan kembali sebuah integral pertama dalam bentuk berikut:

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (40)$$

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial (x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_2} = x_2 \quad (41a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_1} = -x_1 \quad (41b)$$

Sebuah sistem Hamiltonian disebut sebagai sistem berderajat n jika terdapat n buah pasangan, sebut saja (q_i, p_i) , $i = 1..n$ dengan sebuah Hamiltonian $H(q_i, p_i)$ sedemikian rupa sehingga berlaku:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (37a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (37b)$$

Kita akan kembali pada sistem Hamiltonian pada bab-bab berikut.

5. Bifurkasi sistem satu dimensi

Pada pasal III.3 telah kita diskusikan bahwa kehadiran titik kritis dapat ditentukan melalui kondisi $f(x)=0$, sedangkan karakteristik stabilitasnya dapat ditentukan melalui linierisasi sistem PDB yang ditinjau, yaitu melalui harga eigen matriks pada persamaan linier yang terkait. Bentuk dari titik kritis serta harga-harga eigennya ditentukan oleh parameter-parameter yang terdapat di dalam PDB, sehingga dengan demikian jelas bahwa kehadiran dan jenis titik kritis tersebut ditentukan oleh parameter-parameter tersebut.

Secara umum proses perubahan jumlah titik kritis serta jenisnya akibat perubahan parameter yang terkandung di dalam suatu sistem persamaan dinamakan proses Bifurkasi. Perumusan mengenai bifurkasi memiliki peranan yang sangat fundamental dalam dinamika sistem. Untuk memahami arti dari proses bifurkasi, kita akan meninjau terlebih dahulu sistem PDB orde satu tunggal sebagai contoh kasus.

5.1. Bifurkasi sadel-node

Tinjau persamaan berikut:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (38)$$

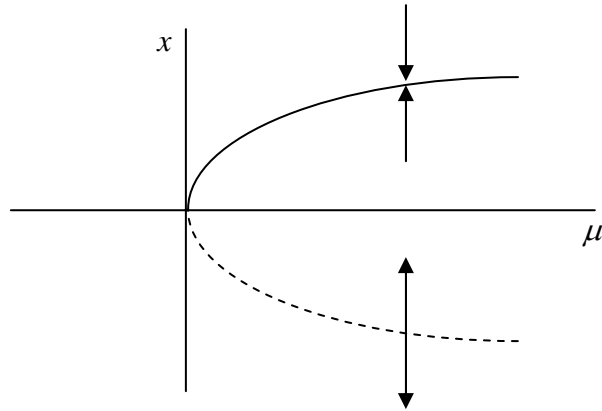
Jelas titik kritis persamaan (38) adalah $x = \pm\sqrt{\mu}$ dan hanya ada jika $\mu \geq 0$. Dengan demikian, jika kita memvariasikan nilai μ dari negatif ke positif, maka pada titik $\mu = 0$, akan muncul dua buah titik kritis yang sebelumnya tidak ada. Kemudian metode berdasarkan linierisasi, kita dapatkan persamaan linier yang terkaitnya diberikan oleh:

$$\dot{X} = \pm 2\sqrt{\mu}X \quad (39)$$

sehingga dengan demikian terdapat dua harga eigen riil yaitu $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{\mu}$, yang masing-masing terkait dengan titik kritis yang berjenis sadel. Berdasarkan tanda bagi setiap harga eigen yang diperoleh, jelas bahwa untuk harga eigen $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}$ terkait dengan titik sadel $x = -\sqrt{\mu}$ yang tidak stabil, karena jika kita memiliki titik awal di sekitar titik tersebut maka trayektorinya akan menjauhinya. Sedangkan $\lambda_2 = -2\sqrt{\mu}$ dengan titik sadel $x = \sqrt{\mu}$ yang stabil, dimana untuk titik awal di sekitar titik tersebut akan menujuinya.

Secara diagram, untuk menerangkan proses bifurkasi, biasa dilakukan dengan membuat gambar seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 11, yang selanjutnya disebut sebagai diagram bifurkasi, yaitu dengan menggambarkan kurva titik kritis pada bidang $x - \mu$.

Untuk kasus persamaan (38) dengan mudah dapat dilihat bahwa dalam bidang tersebut hubungan antara x dengan μ membentuk suatu kurva kuadratis. Bifurkasi ini dicirikan oleh kemunculan dua buah titik kritis berjenis sadel dengan karakteristik stabil dan tidak stabil untuk $\mu > 0$ dari ketiadaan titik kritis untuk $\mu < 0$. Secara khusus titik $(x = 0, \mu = 0)$ dinamakan sebagai titik bifurkasi dan bifurkasi yang dicirikan oleh munculnya dua atau lebih titik kritis dinamakan sebagai bifurkasi sadel-node.



Gambar 11

5.2. Bifurkasi trans-kritikal

Bifurkasi jeni kedua dikenal sebagai bifurkasi trans-kritikal dan berbeda dengan bifurkasi sadel-node, dalam bifurkasi ini jumlah titik kritis sebelum dan sesudah titik bifurkasi tetap tetapi memiliki karakteristik kestabilan yang berbeda. Sebagai contoh kasus, tinjau persamaan berikut:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (40)$$

dengan kurva titik kritis pada bidang $x - \mu$ diberikan oleh $x = 0$ dan $x = \mu$ dan persamaan liniernya diberikan oleh:

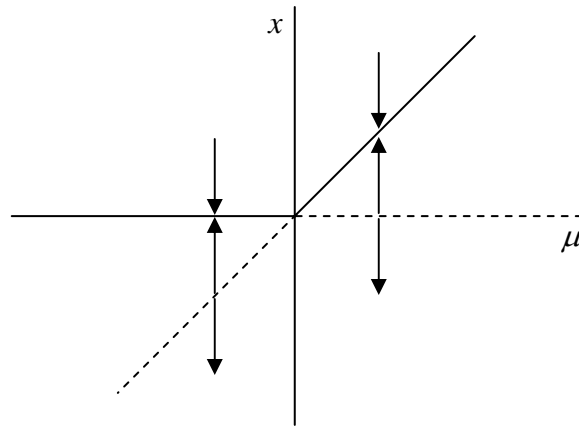
$$\dot{X} = -\mu X \quad (41)$$

untuk titik kritis $x = \mu$ dengan $\lambda = -\mu$ (titik sadel) dan

$$\dot{X} = \mu X \quad (42)$$

Untuk titik kritis $x = 0$ dengan $\lambda = \mu$ (titik sadel). Sehingga dengan demikian jelas terlihat bahwa untuk kasus $x = \mu$, karakteristik stabilitasnya berubah dari stabil menjadi tidak stabil

jika μ berubah dari negatif ke positif. Sedangkan untuk kasus $x = 0$ berlaku sebaliknya, yakni stabilitasnya berubah dari tidak stabil menjadi stabil ketika μ berubah dari negatif ke positif. Sebagaimana yang telah disebutkan di awal, dalam bifurkasi trans-kritikal ini jumlah titik kritis yang terlibat dalam proses tetap dan hanya mengakibatkan pertukaran karakteristik stabilitas. Diagram yang terkait dengan bifurkasi trans-kritikal diberikan pada Gambar 12.



Gambar 12

5.3. Bifurkasi pitch-fork

Tinjau persamaan berikut:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (43)$$

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa untuk $\mu < 0$ hanya terdapat satu titik kritis yaitu $x = 0$ dengan persamaan linier terkait diberikan oleh:

$$\dot{X} = \mu X \quad (44)$$

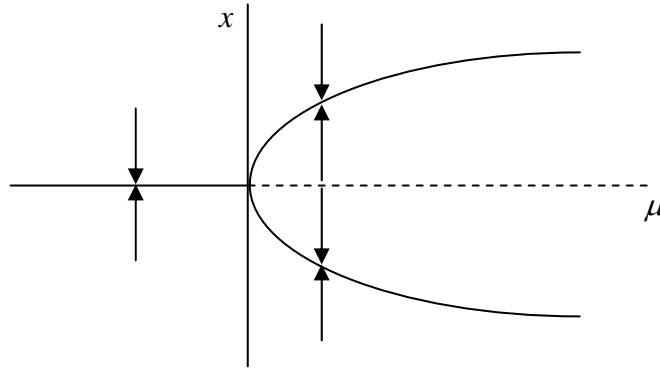
dengan $\lambda_0 = \mu$ sedangkan untuk $\mu > 0$ terdapat tiga buah titik kritis yaitu $x = 0, \pm \sqrt{\mu}$ dengan persamaan liniernya diberikan oleh:

$$\dot{X} = -2\mu X \quad (45)$$

untuk $x = \pm \sqrt{\mu}$ dengan $\lambda_{1,2} = -2\mu$ dan untuk $x = 0$ dengan $\lambda_0 = \mu$ memiliki persamaan linier yang sama dengan persamaan (44).

Berdasarkan persamaan (44), untuk $\mu < 0$ titik kritis terkait merupakan sadel yang bersifat stabil. Sedangkan untuk $\mu > 0$ titik sadel tersebut bersifat tidak stabil, tetapi di pihak lain, untuk titik kritis $x = \pm \sqrt{\mu}$ berdasarkan persamaan (45) keduanya bersifat stabil.

Bifurkasi dengan ciri bertambahnya titik kritis dari satu menjadi tiga buah, dimana untuk titik kritis yang telah ada sebelumnya berubah karakteristik stabilitasnya dari stabil menjadi tidak stabil, sedangkan untuk titik kritis yang baru baru bersifat stabil, dinamakan sebagai bifurkasi pitch-fork dengan diagram terkaitnya diberikan dalam Gambar 13.



Gambar 13

5.4. Bifurkasi Poincaré-Andronov-Hopf

Tinjau sistem PDB dua dimensi berikut yang hanya bergantung pada satu buah parameter:

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad (46a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (46b)$$

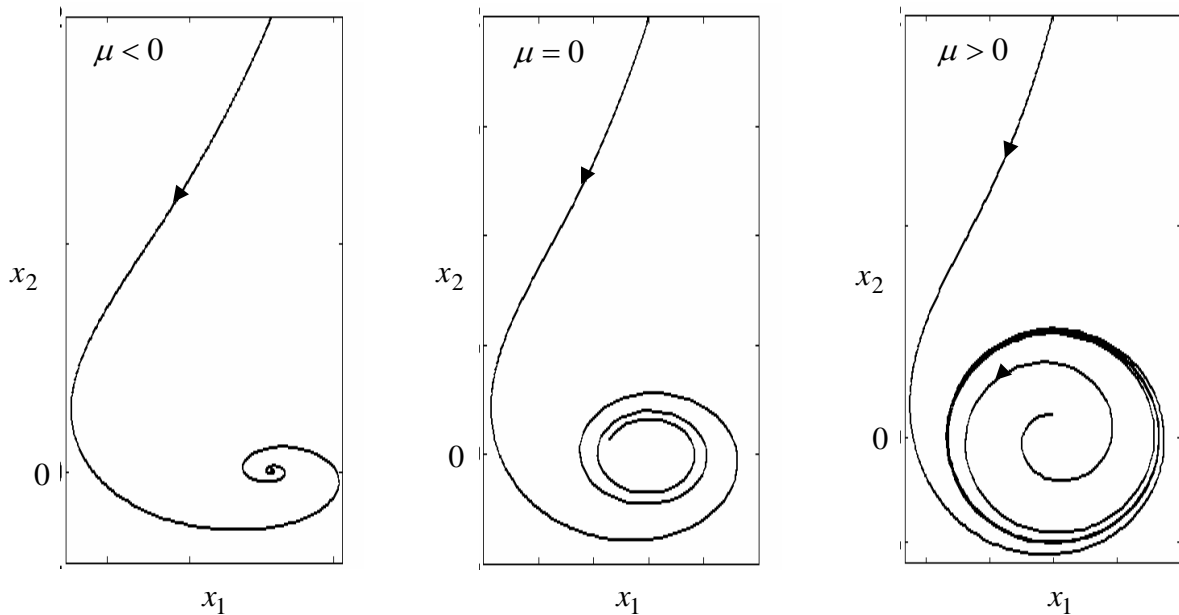
Dengan melakukan transformasi $x_1 = r \cos \theta$ dan $x_2 = r \sin \theta$, maka dalam bidang polar (r, θ) persamaan (46) memiliki bentuk:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad (47a)$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (47b)$$

Terlihat bahwa dalam domain (r, θ) persamaan (46) menjadi tidak saling berkaitan dan yang signifikan untuk kita bahas adalah persamaan (47a). Jelas disini bahwa persamaan (47a) tersebut sama dengan persamaan (43) sehingga dengan demikian bifurkasi yang dialami oleh r adalah bifurkasi pitch-fork. Bahwa untuk kasus $\mu < 0$ dengan satu titik kritis di $r = 0$ yang bersifat stabil. Sedangkan untuk kasus $\mu > 0$ terdapat dua titik titik yakni di $r = 0$ yang bersifat tidak stabil dan titik-titik kritis di $r^2 = \mu$ yang bersifat stabil. Dalam bidang (r, θ) , persamaan $r^2 = \mu$ membentuk sebuah lingkaran dengan jari-jari $\sqrt{\mu}$.

Secara intuitif, dapat dibayangkan berdasarkan sifat bifurkasi r bahwa untuk $\mu < 0$ semua trayektori menuju ke titik kritis di $r = 0$, sedangkan untuk $\mu > 0$ trayektori akan terbagi dua yakni menjadi domain dengan $r^2 > \mu$ dan $r^2 < \mu$. Untuk domain $r^2 > \mu$, trayektori yang berasal dari daerah tersebut akan menuju $r^2 = \mu$, sedangkan untuk domain $r^2 < \mu$ trayektori yang berasal darinya akan menuju $r^2 = \mu$.



Gambar 14

Pada Gambar 14 ditunjukkan pola bifurkasi trayektori untuk kasus $\mu < 0$, $\mu = 0$ dan $\mu > 0$ di bidang (x_1, x_2) yang dipecahkan melalui metode numerik. Terlihat bahwa untuk kasus $\mu < 0$, titik kritis $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ merupakan titik fokus dengan atraktor positif. Untuk meyakini diri, hal ini dapat dibuktikan dengan melakukan analisis linier terhadap persamaan (46). Selanjutnya, untuk $\mu > 0$ titik kritis $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ juga merupakan titik fokus tetapi dengan atraktor negatif. Sementara itu, karena untuk $r^2 = \mu$ membentuk sebuah lingkaran, maka lingkaran titik-titik kritis tersebut dinamakan sebagai "Limit Cycle".

Bifurkasi dengan ciri sebagaimana yang ditunjukkan ini dinamakan sebagai bifurkasi Poincaré-Andronov-Hopf atau biasa di singkat bifurkasi Hopf saja. Bifurkasi ini pada dasarnya melibatkan trayektori yang bersifat periodik dimana terjadi perubahan jenis titik

kritis dari titik fokus dengan atraktor positif menjadi atraktor negatif disertai dengan kemunculan limit cycle.

Pada pembahasan mengenai perilaku chaotic pada persamaan Lorenz yang akan pada salah satu bab-bab berikut, bifurkasi Hopf memainkan peranan yang cukup penting bagi kemunculannya.

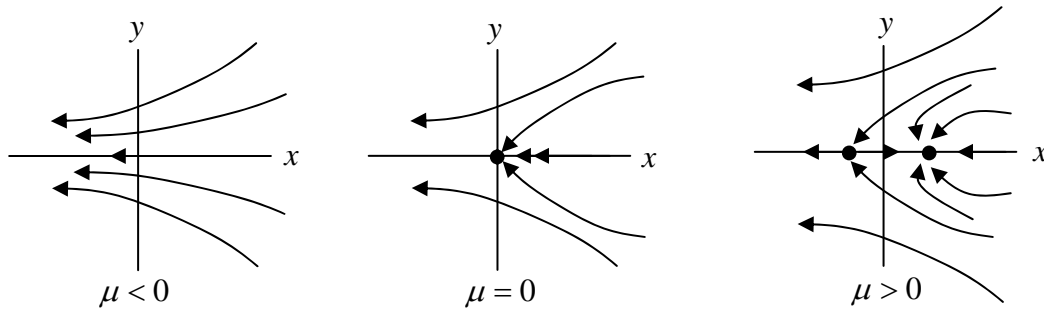
6. Bifurkasi sistem dua dimensi

Untuk memberikan ilustrasi proses bifurkasi dalam sistem dua dimensi kita tinjau PDB sederhana berikut:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \tag{48a}$$

$$\dot{y} = -y \tag{48b}$$

untuk kasus bifurkasi sadel-node dengan proses yang terkait diberikan oleh Gambar 15. Terlihat kemunculan satu buah titik kritis yang bersifat tidak stabil dan satu buah yang bersifat stabil untuk $\mu > 0$.

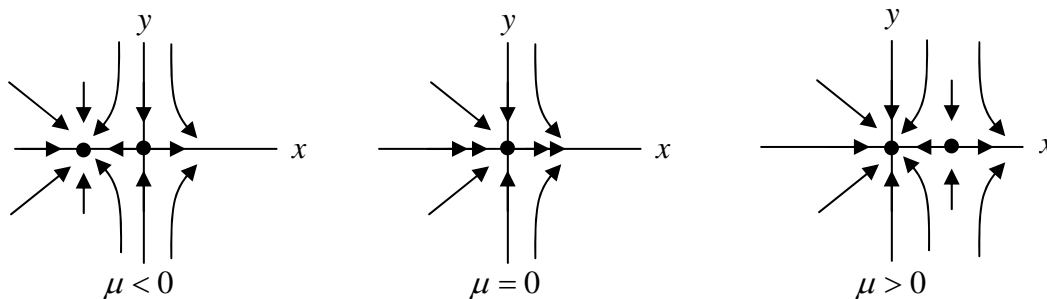


Gambar 15

Untuk kasus bifurkasi trans-kritikal, kita tinjau persamaan berikut:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \tag{49a}$$

$$\dot{y} = -y \tag{49b}$$



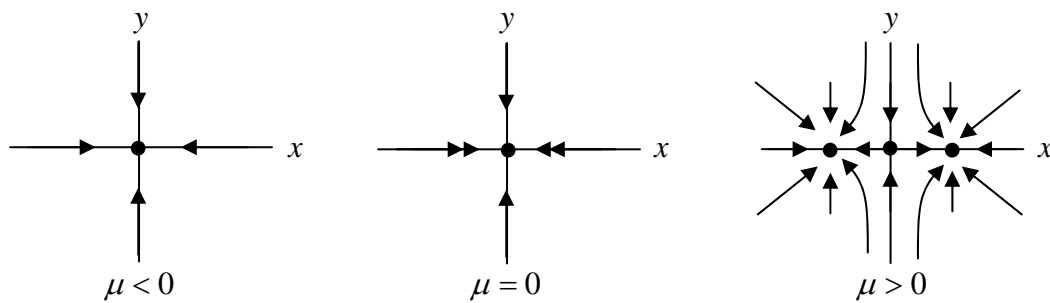
Gambar 16

Berdasarkan Gambar 16, terlihat perubahan jenis stabilitas titik kritis dari stabil (tidak stabil) menjadi tidak stabil (stabil). Sedangkan untuk kasus bifurkasi pitch-fork pada Gambar 17, dengan persamaan contoh diberikan oleh:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (50a)$$

$$\dot{y} = -y \quad (50b)$$

terlihat kemunculan dua buah titik kritis baru sementara titik kritis yang telah lebih dahulu ada berubah stabilitasnya dari stabil menjadi tidak stabil. Untuk kasus bifurkasi Hopf proses bifurkasinya telah diberikan pada pasal 5.4.



Gambar 17

Perlu ditekankan di sini, walau tidak dibahas pada buku ini, bahwa jenis-jenis bifurkasi dalam dua atau lebih dimensi tidak hanya terbatas pada empat jenis yang telah kita bahas di atas. Terdapat banyak lagi jenis bifurkasi lainnya seperti Bogdanov-Takens, Chenciner, Cusp, Period-Doubling (flip), fold, Gavrilov-Guckenheimer, Homoclinic, Heteroclinic, Neimark-Sacker, Shil'nikov-Hopf dan masih banyak lainnya. Secara umum bifurkasi dapat dikategorikan menjadi bifurkasi local, yang dapat dilihat dengan meninjau perubahan kelakuan aliran trayektori di sekitar titik kritis, dan bifurkasi global yang tidak dapat ditentukan melalui perubahan kelakuan trayektori di sekitar titik kritis. Keempat bifurkasi yang telah kita bahas merupakan bifurkasi lokal.

BAB IV

SOLITON OPTIK

Bab ini membahas salah satu gejala yang penting akibat kehadiran nonlinieritas di alam, yakni kehadiran soliton. Persamaan nonlinier yang terkait dengan kehadiran soliton biasanya merupakan bentuk aproksimasi dari persamaan umum eksak di dalam berbagai cabang Fisika. Secara khusus dalam diskusi berikut akan ditinjau persamaan nonlinier yang terkait dengan gejala soliton dalam sistem optik. Mengingat relatif panjangnya penurunan bagi persamaan terkait, maka rinciannya tidak akan dibahas.

1. Persamaan Schrödinger nonlinier dan soliton optik

Kita mulai pembahasan mengenai kehadiran soliton optik dengan meninjau persamaan perambatan pulsa elektromagnetik dalam serat optik, yang pada dasarnya merupakan medium dielektrik, yang jika dirambati oleh cahaya dengan intensitas tinggi memperlihatkan kebergantungan indeks bias terhadap intensitas cahaya. Medium dengan perilaku seperti itu dinamakan sebagai medium Kerr.

Persamaan gelombang yang terkait dengan perambatan pulsa dalam serat optik tersebut lazim disebut sebagai persamaan Schrödinger nonlinier yang dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$i \frac{\partial E}{\partial z} - \beta \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma |E|^2 E = 0 \quad (1)$$

dimana E merupakan medan selubung dari pulsa listrik sedangkan $\beta \sim -v_g^{-2} dv_g/d\omega$ merupakan parameter yang terkait dengan dispersi kecepatan group v_g akibat sifat dispersif bahan, dan $\sigma \sim \chi^{(3)}$ terkait dengan suseptibilitas orde tiga dari medium Kerr yang dilalui.

Kita akan mencari solusi bagi persamaan (1) dalam bentuk berikut:

$$E(z, t) = u(t) e^{ikz} \quad (2)$$

dengan $u(t)$ merupakan sebuah fungsi riil. Substitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (1) menghasilkan:

$$-\kappa u - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma u^3 = 0 \quad (3)$$

Selanjutnya kalikan persamaan (3) dengan du/dt sehingga:

$$-\kappa u \frac{du}{dt} - \beta \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{du}{dt} + \sigma u^3 \frac{du}{dt} = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[-\kappa u^2 - \beta \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} u^4 \right] = 0 \quad (5)$$

yang mengindikasikan bahwa:

$$-\kappa u^2 - \beta \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} u^4 = c \quad (6)$$

dimana c merupakan sebuah konstanta. Selanjutnya kita kembali membatasi diri pada solusi yang memiliki kondisi $du/dt \rightarrow 0$ dan $u \rightarrow 0$ pada $t \rightarrow \pm\infty$ dan mengimplikasikan $c = 0$.

Dari sini kita dapat megatur kembali persamaan (6) menjadi:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{1}{-\beta} \left(\kappa u^2 - \frac{\sigma}{2} u^4 \right) \quad (7)$$

atau

$$\frac{du}{u \sqrt{\frac{2\kappa}{\sigma} - u^2}} = \frac{dt}{\sqrt{-2\beta/\sigma}} \quad (8)$$

Misalkan $u = \sqrt{2\kappa/\sigma} \sin \psi$ dan $du = \sqrt{2\kappa/\sigma} \cos \psi d\psi$, sehingga ruas kanan persamaan (8) dalam variabel ψ menjadi:

$$\frac{du}{u \sqrt{2\kappa/\sigma - u^2}} \rightarrow \frac{d\psi}{\sqrt{2\kappa/\sigma} \sin \psi} \quad (9)$$

Integrasikan hasil yang diperoleh terhadap variabel ψ diperoleh:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{2\kappa/\sigma} \sin \psi} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa/\sigma}} \ln \left(\frac{1}{\sin \psi} - \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \right) \quad (10)$$

Nyatakan kembali ruas kanan persamaan (10) dalam variabel u :

$$\frac{1}{\sqrt{2\kappa/\sigma}} \ln\left(\frac{1}{\sin \psi} - \frac{\cos \psi}{\sin \psi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa/\sigma}} \ln\left[\sqrt{2\kappa/\sigma} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - u^2 \sigma/2k}}{u}\right)\right] \quad (11)$$

Sedangkan integrasi ruang kanan persamaan (8) didapat:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{-2\beta/\sigma}} = \frac{t}{\sqrt{-2\beta/\sigma}} \quad (12)$$

Dengan demikian persamaan yang harus dipecahkan adalah:

$$\ln\left[\sqrt{2\kappa/\sigma} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - u^2 \sigma/2k}}{u}\right)\right] = \sqrt{\kappa/\beta} t \quad (13)$$

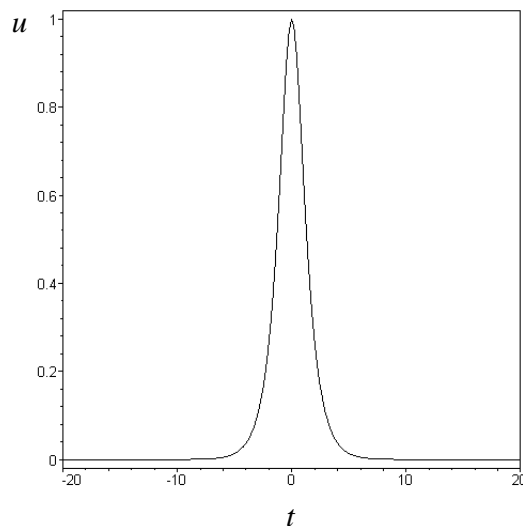
Dari sini diperoleh untuk u :

$$u(t) = \frac{2\sqrt{2\kappa/\sigma} \exp(\sqrt{-\kappa/\beta} t)}{1 + \exp(2\sqrt{-\kappa/\beta} t)} \quad (14)$$

Bentuk solusi (14) dapat diubah menjadi bentuk trigonomrtri berikut:

$$u(t) = \sqrt{2\kappa/\sigma} \operatorname{sech}(\sqrt{-\kappa/\beta} t) \quad (15)$$

dengan bentuk profilnya diberikan dalam Gambar 1. Jelas bahwa solusi yang diperoleh merupakan solusi yang terlokalisasi dengan ekor-ekor yang menuju nol. Dalam Fisika solusi ini dinamakan sebagai soliton.



Gambar 1

Dapat dengan mudah dilihat, karena $\sigma > 0$, yang terkait dengan susceptibilitas orde tiga serat optik, maka kondisi yang harus dipenuhi adalah $\beta < 0$ dan $\kappa > 0$ agar fungsi u merupakan fungsi riil. Kondisi perambatan dengan $\beta < 0$ terkait dengan keadaan dispersi anomali.

Untuk melihat makna dari solusi (15) dalam bahasa dinamika sistem, kita tinjau kembali persamaan (3) dalam bentuk PDB orde satu berikut:

$$\dot{u}_1 = -\frac{u_2}{\beta} \quad (16a)$$

$$\dot{u}_2 = \kappa u_1 - \sigma u_1^3 \quad (16b)$$

Jelas terlihat bahwa titik-titik kritis untuk sistem persamaan (16) adalah:

$$u_1 = 0, u_2 = 0 \quad (17a)$$

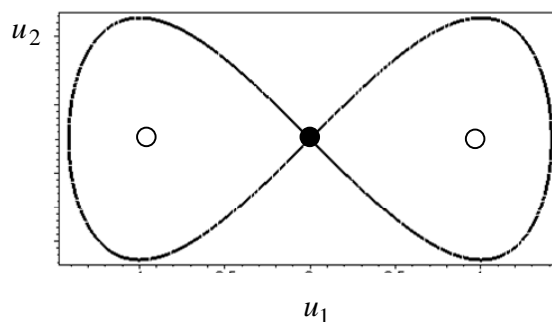
$$u_1 = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}, u_2 = 0 \quad (17b)$$

dan harga eigen yang terkait dengan masing-masing titik kritis diberikan oleh:

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{-\beta}} \quad (18a)$$

$$\lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{2\kappa}{\beta}} \quad (18b)$$

Untuk $\beta < 0$ dan $\kappa > 0$ dapat dengan mudah disimpulkan bahwa titik kritis (17a) merupakan sebuah titik sadel, sedangkan titik kritis (17b) merupakan titik-titik center.

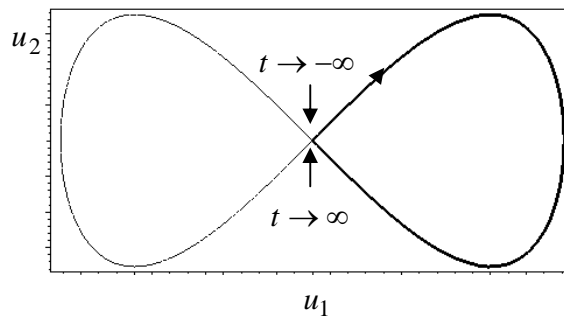


Gambar 2

Sebelum kita meninjau bentuk trayektori solusi berdasarkan proses linierisasi, perlu disadari bahwa sistem persamaan (16) membentuk suatu sistem Hamiltonian dengan fungsional Hamiltonian terkait diberikan oleh:

$$H = -\frac{\kappa}{2}u_1^2 + \frac{\sigma}{4}u_1^4 - \frac{1}{2\beta}u_2^2 \quad (19)$$

dimana persamaan (16) memenuhi persamaan kanonik $\dot{u}_1 = \partial H / \partial u_2$ dan $\dot{u}_2 = -\partial H / \partial u_1$. Mengingat pada titik $(0, 0)$ merupakan titik sadel, maka nilai Hamiltonian untuk trayektori yang terkait dengan titik tersebut adalah $H = 0$. Dengan demikian, sambil memperhatikan kenyataan bahwa terdapat dua buah titik center dan sebuah titik sadel di titik asal, maka bentuk trayektori yang dimaksud adalah sebagaimana yang diberikan oleh Gambar 2.



Gambar 3

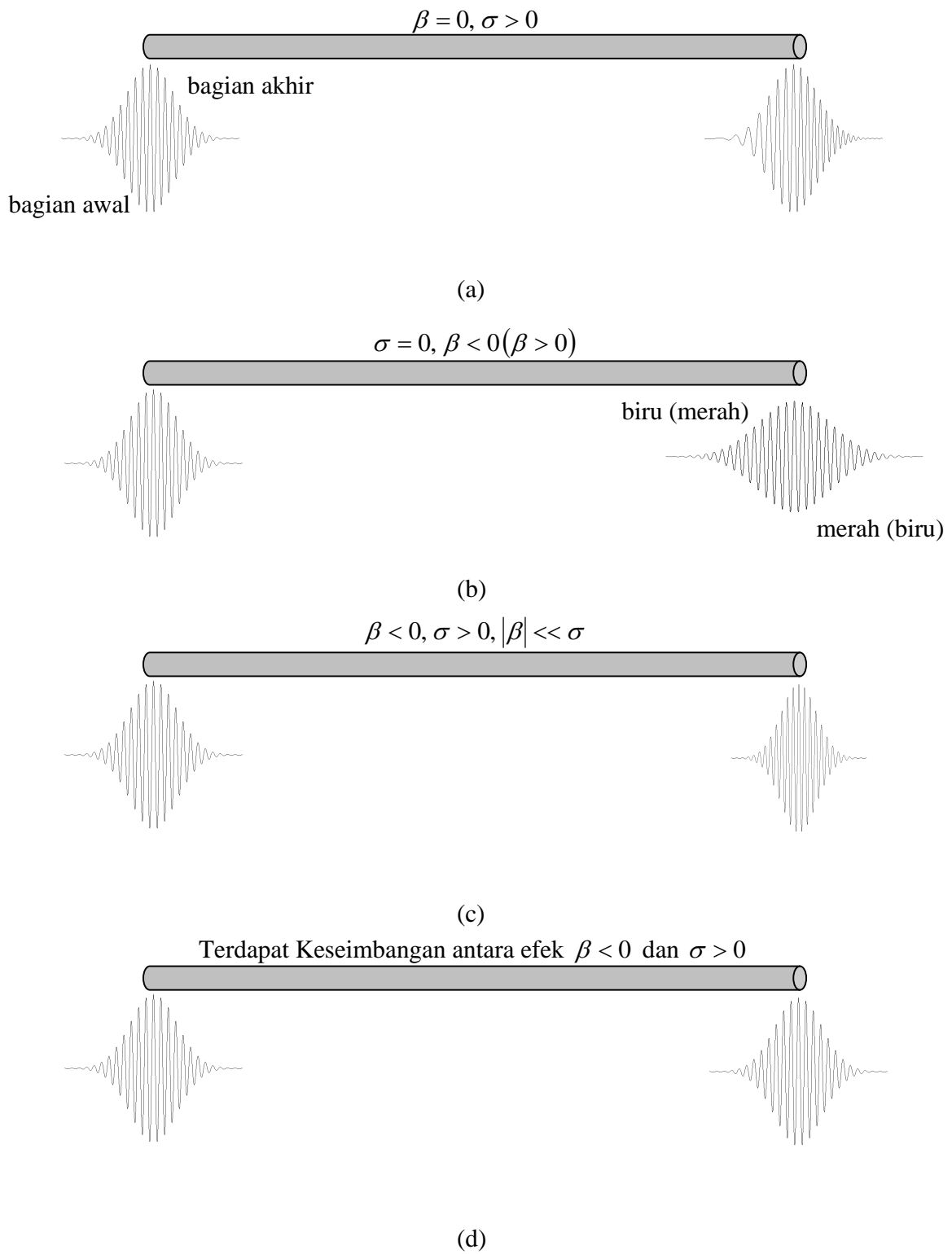
Berdasarkan persamaan (16) diketahui bahwa:

$$u_2(t) = -\kappa \sqrt{-2\beta/\sigma} \operatorname{sech}(\sqrt{-\kappa/\beta}t) \tanh(\sqrt{-\kappa/\beta}t) \quad (20)$$

Dengan menggunakan aplikasi Maple, dapat diperlihatkan bahwa untuk rentang $-\infty < t < \infty$, maka diperoleh dalam Gambar 3, pola trayektori dari persamaan (20) yang dikombinasikan dengan:

$$u_1(t) = u(t) = \sqrt{2\kappa/\sigma} \operatorname{sech}(\sqrt{-\kappa/\beta}t) \quad (21)$$

secara implisit dalam bidang $(u_1(t), u_2(t))$. Terlihat bahwa kombinasi tersebut cocok dengan trayektori dari Hamiltonian dengan $H = 0$ pada bagian kurva tertutup bagian kanan. Kurva tertutup bagian kiri dari Gambar 3 terkait dengan solusi $u_1 \rightarrow -u_1$, dimana berdasarkan transformasi ini persamaan (16) invarian.



Gambar 4

2. Mekanisme fisis terbentuknya soliton temporal

Mekanisme propagasi soliton temporal di dalam serat optik dapat dikaji dengan meninjau persamaan (1) untuk kasus khusus: (i) $\beta = 0$, (ii) $\sigma = 0$, (iii) $|\beta| \ll \sigma$ dan (iv) efek β seimbang dengan σ . Seperti diilustrasikan pada Gambar 4, kasus-kasus tersebut dapat memberikan gambaran mengenai efek yang ditimbulkan oleh masing-masing suku.

Untuk kasus pertama dengan $\beta = 0$ dan $\sigma > 0$, seperti diilustrasikan oleh Gambar v4(a), akibat kehadiran nonlinieritas, pulsa yang memasuki serat optik mengalami pelebaran frekuensi. Bagian awal pulsa mengalami pengurangan frekuensi sehingga modulusnya menjadi renggang, sedangkan bagian akhir pulsa mengalami hal sebaliknya, yaitu mengalami penambahan frekuensi sehingga bagian tersebut makin rapat modulusnya. Efek pelebaran frekuensi ini lazim disebut sebagai *self-phase modulation* (SPM).

Di pihak lain, untuk kasus $\beta \neq 0$ dan $\sigma = 0$, melalui definisi dispersi kecepatan grup, $\beta \sim -v_g^{-2} dv_g/d\omega$, jelas terlihat jika $\beta > 0$ maka $v_g(\omega + d\omega) < v_g(\omega)$. Artinya, untuk komponen pulsa dengan frekuensi yang lebih tinggi merambat lebih lambat ketimbang frekuensi yang lebih rendah. Hal ini mengakibatkan pelebaran pulsa, dimana frekuensi tinggi yang diwakili oleh warna biru akan tertinggal dari yang warna merah, seperti terlihat pada Gambar 4(b). Kondisi dengan $\beta > 0$ dinamakan sebagai dispersi normal. Sebaliknya, untuk kasus $\beta < 0$ jelas terlihat bahwa $v_g(\omega + d\omega) > v_g(\omega)$. Komponen pulsa dengan frekuensi yang lebih rendah merambat lebih lambat ketimbang frekuensi yang lebih tinggi, sehingga juga mengakibatkan pelebaran pulsa, tetapi kali ini frekuensi yang diwakili oleh merah yang tertinggal dari biru. Kondisi dengan $\beta < 0$ dinamakan sebagai dispersi anomalous.

Penggabungan antara dua efek di atas, yaitu antara pelebaran frekuensi akibat SPM dan dispersi untuk jenis anomalous akan mengakibatkan penyempitan pulsa. Hal ini disebabkan karena dispersi anomalous menyebabkan melambatnya komponen pulsa dengan frekuensi rendah, sementara akibat SPM pada bagian awal pulsa mengalami penurunan frekuensi. Jika kedua efek ini digabungkan, maka bagian awal pulsa akan mengalami pemampatan. Di sisi lain, bagian akhir pulsa yang mengalami peningkatan frekuensi akibat SPM menjadi semakin besar laju rambatnya dan berakibat pula pada pemampatan bagian tersebut. Sebagai hasilnya,

pulsa akan mengalami peyempitan sebagaimana yang diilustrasikan oleh Gambar 4(c). Dapat dengan mudah dipahami bahwa komposisi yang tepat antara SPM dan dispersi anomalous dapat menghasilkan pulsa stabil yang tidak mengalami pelebaran akibat dispersi bahan, Gambar 4(d). Dengan kata lain, soliton temporal dapat terbentuk jika terjadi keseimbangan antara kedua efek tersebut.

3. Metode Hirota & solusi multi-soliton

Solusi persamaan (15) dikenal sebagai solusi soliton fundamental bagi persamaan Schrödinger nonlinier (1). Oleh Zakharov dan Shabat (Z-S) di tahun 1972 telah ditunjukkan melalui metode hamburan balik, bahwa persamaan tersebut memiliki solusi yang jumlahnya tidak berhingga, dalam pengertian setiap kondisi awal yang diberikan pasti memiliki bentuk tertutupnya yang eksak. Salah satu yang solusi yang paling penting adalah solusi multi-soliton yang pada dasarnya dapat dipandang sebagai solusi orde tinggi (non-fundamental) dari persamaan Schrödinger nonlinier.

Selain metode hamburan balik yang dikembangkan oleh Z-S, terdapat pula beberapa metode yang berhasil dikembangkan untuk memperoleh solusi multi-soliton tersebut antara lain melalui metode Darboux, Backlund dan Hirota. Dari kesemua metode yang disebutkan, metode Hirota merupakan metode dengan prosedur yang paling sederhana.

2.1. Persamaan bilinear dan ansatz Hirota

Untuk mempermudah pembahasan dipergunakan harga $\beta = -1/2$ dan $\sigma = 1$ bagi parameter yang terdapat dalam persamaan (1). Misalkan terdapat dua buah fungsi $a(z, t)$ dan $b(z, t)$, oleh Hirota di tahun 1973, telah didefinisikan suatu bentuk operator yang bekerja pada kedua fungsi tersebut sebagai berikut:

$$\frac{D^m}{dz} a(z, t) \circ b(z, t) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'} \right)^m a(z, t) b(z', t) \Big|_{z=z'} \quad (22a)$$

$$\frac{D^m}{dz} a(z, t) \circ b(z, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m a(z, t) b(z, t') \Big|_{t=t'} \quad (22b)$$

yang dinamakan sebagai operator bilinear Hirota. Selanjutnya kita tinjau bentuk solusi (2) bagi persamaan (1) dengan $\kappa = 1/2$ yang dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$E(z,t) = \frac{G(z,t)}{F(z,t)} \quad (23)$$

dengan:

$$G(z,t) = 2 \exp(t) \exp(iz/2) \quad (24a)$$

$$F(z,t) = 1 + \exp(2t) \quad (24b)$$

Perhatikan bahwa fungsi G merupakan fungsi kompleks, sedangkan F riil. Misalkan kita memiliki solusi bagi persamaan (1) dengan bentuk sebagaimana yang diberikan oleh persamaan (23). Dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan (1) diperoleh:

$$i \frac{1}{F} \frac{\partial G}{\partial z} - i \frac{G}{F^2} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{2G}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 - \frac{2G}{F^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right] + \frac{|G|^2 G}{F^3} = 0 \quad (25)$$

Memfaat operator bilinear Hirota, persamaan (25) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$i \frac{D(G \circ F)}{F^2 dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{D^2(G \circ F)}{F^2 dt^2} - \frac{G}{F^3} \frac{D^2(F \circ F)}{dt^2} \right) + \frac{G}{F^3} |G|^2 = 0 \quad (26)$$

Dengan mengatur kembali persamaan (26) diperoleh:

$$\frac{1}{F^2} \left(i \frac{D(G \circ F)}{dz} - \frac{1}{2} \frac{D^2(G \circ F)}{dt^2} \right) - \frac{G}{F^3} \left(\frac{1}{2} \frac{D^2(F \circ F)}{dt^2} + |G|^2 \right) = 0 \quad (27)$$

Dari sini terlihat, dengan mengacu pada karakteristik solusi (23), maka persamaan (27) dapat dipandang sebagai penjumlahan atas dua persamaan berikut:

$$i \frac{D(G \circ F)}{dz} - \frac{1}{2} \frac{D^2(G \circ F)}{dt^2} = 0 \quad (28a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{D^2(F \circ F)}{dt^2} + |G|^2 = 0 \quad (28b)$$

yang dikenal sebagai persamaan bilinear Hirota bagi persamaan Schrödinger nonlinier. Oleh Hirota, untuk memperoleh kembali solusi (23) dari persamaan dari persamaan (28), diperkenalkan suatu parameter ε dan menuliskan fungsi G dan F dalam bentuk ansatz umum berikut:

$$G(z,t) = \varepsilon g(z,t) \quad (29a)$$

$$F(z,t) = 1 + \varepsilon^2 f(z,t) \quad (29b)$$

Dengan mensubstitusikan ansatz (29) ke dalam persamaan (28), kita akan memperoleh suatu set persamaan berdasarkan orde pangkat parameter ε yang selanjutnya dipecahkan satu per satu sehingga diperoleh kembali solusi (21) dengan mengambil $\varepsilon = 1$ di akhir perhitungan.

2.2. *Solusi satu soliton*

BAB V

SOLITON HIDRODINAMIK

Setelah sebelumnya kita membahas kehadiran soliton pada sistem optik, maka dalam bab ini akan dibahas kemunculan soliton dalam sistem hidrodinamika. Sebagaimana telah disinggung pada bab pendahuluan, soliton hidrodinamik merupakan gejala pertama yang mengantarkan orang ke dalam fenomena nonlinieritas melalui pengamatan gelombang soliter oleh J. S. Russel pada suatu kanal di Edinburgh tahun 1834. Selanjutnya, selang 62 tahun kemudian diketahui bahwa persamaan dinamika dari gelombang yang teramati tersebut diberikan oleh persamaan Korteweg de-Vries atau disingkat KdV, yang merupakan bentuk tereduksi dari persamaan yang lebih umum yaitu persamaan Boussinesq. Persamaan Boussinesq sendiri dapat diturunkan dari hukum-kukum kekekalan energi dan momentum serta persamaan kontinuitas yang terkait dengan dinamika fluida yang inkompresibel dan irrotasional. Dalam kesempatan ini kita akan memfokuskan diri pada karakteristik fundamental dari persamaan KdV serta bentuk gelombang soliton yang dimilikinya.

Kita mulai pembahasan mengenai kehadiran soliton hidrodinamik dengan meninjau persamaan persamaan KdV yang dapat dituliskan dalam bentuk ternormalisasi berikut:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

dimana $\eta(z, t)$ merupakan fungsi yang terkait ketinggian permukaan fluida, sedangkan z merupakan arah propagasi gelombang. Terlihat bahwa suku kedua ruas kiri persamaan (1) merupakan suku dispersi yang mengakibatkan bertambah lebarnya gelombang air, sedangkan suku ketiga merupakan bagian nonlinier yang berperan dalam mengimbangi laju pelebaran karena dispersi sehingga mengakibatkan terbentuknya gelombang soliton yang stabil.

Kita akan mencari solusi bagi persamaan (1) dalam bentuk berikut:

$$\eta(z, t) = f(\xi) \quad (2)$$

dengan f merupakan sebuah fungsi riil dari variabel $\xi = z - vt$, dengan $v > 0$ adalah kecepatan rambat gelombang. Substitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (1) menghasilkan persamaan diferensial biasa berikut:

$$-v \frac{df}{d\xi} + \frac{d^3 f}{d\xi^3} + f \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (3)$$

Selanjutnya, ubah persamaan (3) menjadi bentuk berikut:

$$\frac{d}{d\xi} \left[-vf + \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} f^2 \right] = 0 \quad (4)$$

Jelas, ungkapan dalam kurung siku pada persamaan (4) merupakan sebuah integral pertama:

$$-vf + \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} f^2 = c_0 \quad (5)$$

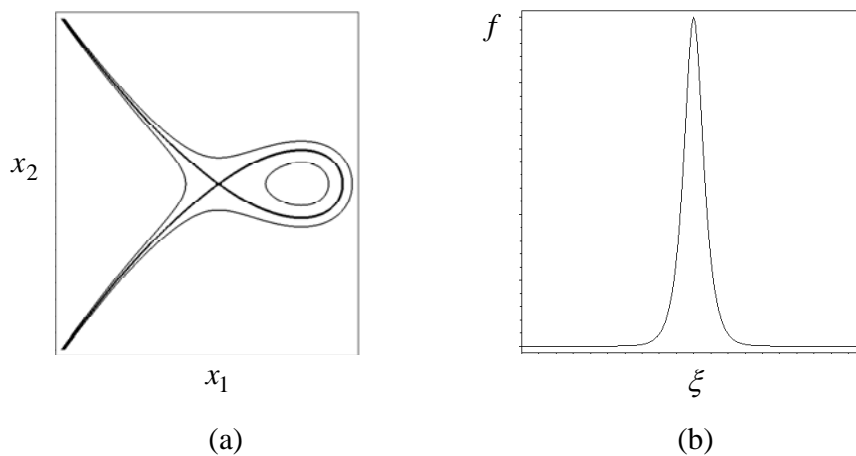
dimana c_0 merupakan sebuah konstanta. Selanjutnya kita kembali membatasi diri pada solusi yang memiliki kondisi $df/d\xi \rightarrow 0$ dan $f \rightarrow 0$ pada $\xi \rightarrow \pm\infty$ dan mengimplikasikan $c_0 = 0$.

Dengan mendefinisikan $x_1 = f$ dan $x_2 = df/d\xi$, persamaan (5) dapat diubah menjadi sistem PDB orde satu berikut:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (6a)$$

$$\dot{x}_2 = vx_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \quad (6b)$$

Dapat dengan mudah dilihat bahwa titik-titik kritis sistem PDB (6) adalah $(0,0)$ dan $(2v,0)$. Kembali dengan melakukan analisis linier diperoleh bahwa untuk titik kritis pada titik asal memiliki harga-harga eigen $\lambda = \pm\sqrt{v}$ yang riil. Sedangkan untuk titik kritis lainnya diperoleh $\lambda = \pm i\sqrt{v}$.



Gambar 1

Dengan demikian jelas bahwa titik kritis pada titik asal merupakan titik sadel, sementara yang lainnya adalah titik center, dengan gambar trayektori yang terkait diberikan pada Gambar 1a. Berdasarkan gambar tersebut, dapat diidentifikasi bahwa kurva tertutup pada bidang bagian kanan merupakan trayektori dari profil soliton, sebagaimana yang diberikan oleh Gambar 1b.

Untuk memperoleh solusi eksplisit persamaan (3), kalikan persamaan (5) untuk $c_0 = 0$ dengan $df/d\xi$ sehingga:

$$\frac{d}{d\xi} \left[-\frac{v}{2} f^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{6} f^3 \right] = 0 \quad (7)$$

Sehingga diperoleh kembali integral yang lain:

$$-\frac{v}{2} f^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{6} f^3 = c_1 \quad (8)$$

dimana c_1 adalah konstanta. Kembali dengan mengambil $c_1 = 0$ diperoleh:

$$\frac{df}{\sqrt{f^2 - f^3/3v}} = \sqrt{v} d\xi \quad (9)$$

Misalkan

$$F = \sqrt{f/3v} \quad (10)$$

maka diperoleh bentuk integrasi berikut:

$$\int \frac{2dF}{F\sqrt{1-F^2}} = \sqrt{v}\xi \quad (11)$$

Berdasarkan tabel integrasi, ruas kiri persamaan (11) menghasilkan:

$$\int \frac{dF}{F\sqrt{1-F^2}} = \text{arcsech}(F) \quad (12)$$

sehingga:

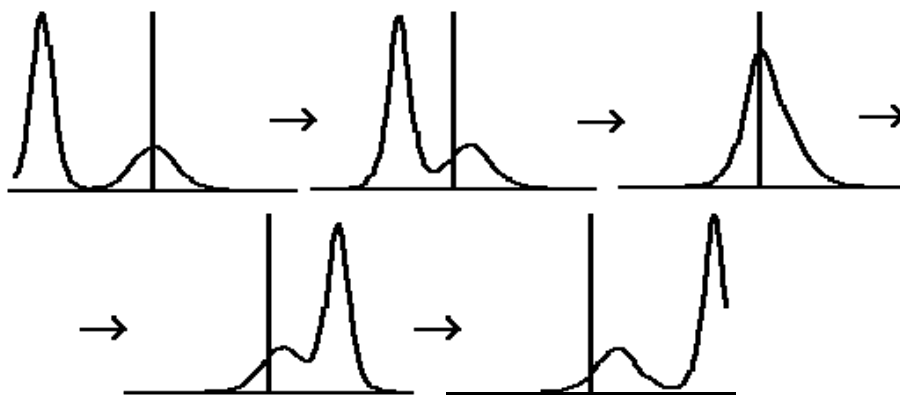
$$F = \text{sech} \left(\frac{\sqrt{v}}{2} \xi \right) \quad (13)$$

Dengan demikian berdasarkan pemisalan (9) diperoleh:

$$f = 3v \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} \xi \right) \quad (14)$$

dimana $\xi = z - vt$. Jelas bahwa plot solusi (14) memiliki bentuk sebagaimana yang diberikan oleh Gambar 1b. Berdasarkan solusi (14), terlihat terdapatnya kaitan antara amplitudo serta lebar gelombang terhadap kecepatan rambatnya. Perlu dicatat bahwa hal ini merupakan ciri khas utama bagi gelombang-gelombang soliton.

Solusi (14) merupakan solusi satu soliton yang lazim dikatakan sebagai soliton fundamental. Seperti halnya persamaan Schrodinger nonlinier, persamaan KdV juga memiliki solusi orde tinggi yang terdiri atas beberapa soliton fundamental jika dilihat pada $\xi \leftarrow \pm\infty$. Sebagai ilustrasi, dapat dilihat pada Gambar 2 bagaimana interaksi antara dua buah soliton terjadi, yang menunjukkan bahwa peristiwa tersebut tidak dapat dipandang sebagai proses superposisi linier atas dua gelombang soliton fundamental.



Gambar 2

Pada gambar tersebut diilustrasikan sebuah soliton yang beramplitudo besar, sehingga besar pula kecepatannya, mendahului soliton lain yang lebih lebih kecil amplitudonya. Setelah berinteraksi, bentuk keduanya kembali seperti sebelum interaksi terjadi. Satu-satunya ingatan yang masih memberi bekas bahwa telah terjadi interaksi adalah perbedaan posisi antara kedua soliton dibanding jikalau tidak pernah terjadi interaksi.

Seperti halnya untuk kasus persamaan Schrodinger nonlinier, solusi dua atau lebih soliton pada persamaan KdV dapat diperoleh dengan beberapa metode seperti hamburan balik, transformasi Backlund maupun metoda Hirota. Khusus untuk metoda Hirota, bentuk solusi f diambil berbentuk sebagai berikut:

$$f = \frac{d(\ln G)}{d\xi} = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\xi} \quad (15)$$

dimana G merupakan fungsi riil. Bentuk persamaan (15) lazim dikenal sebagai transformasi Cole-Hopf. Selanjutnya, untuk memperoleh kembali solusi satu soliton dimisalkan bentuk fungsi G pada persamaan (15) memiliki bentuk sebagai berikut:

$$G = 1 + \varepsilon G_1 \quad (16)$$

Substitusikan persamaan (16) ke dalam persamaan KdV (3) diperoleh persamaan-persamaan untuk tiap orde ε berbeda yang dapat diselesaikan secara rekursif.